# Elementarni zadaci iz predmeta **Euklidska geometrija 1**

## Trougao

### Računanje uglova u trouglu

**1.** Težišnica i visina iz vrha A u $\triangle ABC$ djele ugao $\alpha$ na tri jednaka dijela. Koliki su uglovi trougla $\triangle ABC$.

**2.** U trouglu $\triangle ABC$ je $\measuredangle ABC = 2\measuredangle BAC$ i težišna linija $CM$ je normalna (ortogonalna) na $BD$ ugla $\measuredangle ABC$. Odrediti uglove trougla $\triangle ABC$.

**3.** Dat je jednakokraki - pravougli trougao $\triangle ABC$ s pravim uglom kod vrha $C$. Nad stranicom (katetom) $BC$ konstruisan je jednakostranični trougao $\triangle BCD$ (razlikovati dva slučaja, kad je tačka $D$ sa one strane prave $p(A,B)$ sa koje nije tačka $C$ i kad je tačka $D$ sa one strane prave $p(B,C)$ sa koje nije tačka $A$). Izračunati veličinu ugla $\measuredangle ADB$.

**4.** Na hipotenuzi $AB$ pravouglog trougla $\triangle ABC$ date su tačke $M$ i $N$ tako da je $AM = AC$, $BN = BC$ i poredak $A - N - M - B$. Izračunati ugao $\measuredangle MCN$.

**5.** Dat je jednakokraki trougao $\triangle ABC$ ($AC = BC$). Na kraku $AC$ odabrane su dvije tačke $M$ i $N$ tako da je $\measuredangle ABM \cong \measuredangle CBN$ i $MN \cong MB$, pri čemu je tačka $M$ bliža tački $A$ nego tačka $N$. Koliki je ugao $\measuredangle ABN$?

**6.** Dat je jednakokraki trougao $\triangle ABC$ sa osnovicom $BC$ tako da je ugao $\measuredangle BAC > 50^\circ$. Na osnovici BC data je tačka $M$ takva da je ugao $\measuredangle BAM = 50^\circ$, a na kraku $AC$ tačka $N$ takva da je $AM \cong AN$. Koliki je ugao $\measuredangle CMN$.

**7.** U oštrouglom trouglu $\triangle ABC$ ($AC < BC$) visina $h_c = CC'$ i simetrala $s = p(C, M)$ ugla $\gamma$ zaklapaju ugao od $9^\circ$, a simetrale spoljašnjih uglova kod tjemena $A$ i $B$ sijeku se pod uglom od $61^\circ$. Odrediti uglove $\triangle ABC$.

**8.** Nacrtati trougao $\triangle ABC$, ($\beta > \alpha$) i visinu $h_c$ iz vrha $C$. Tačku u kojoj visina $h_c$ iz vrha $C$ siječe pravu $AB$ označimo sa $E$. Produžimo stranicu $BC$ preko vrha $C$, te konstruiši simetralu vanjskog ugla uz vrh $C$. Tačku u kojoj simetrala siječe pravu $p(A,B)$ označi sa $D$. Ako je $\frac{1}{2}CD = CE$, odrediti koliko je $\beta - \alpha$.

### Dokazi u vezi trougla

**1.** Neka je $I$ centar upisanog kruga $\triangle ABC$, ($AB < BC$), tačka $S$ centar opisanog kruga $k$ oko trougla $\triangle ABC$ i tačka $M$ sredina stranice $AC$. Ako su $P$ i $N$ tačke dobijene presjekom prave $p(M,S)$ i kruga $k$ (gdje su tačke $B$ i $N$ sa jedne strane, a tačka $P$ sa druge strane prave $p(A,C)$), dokazati da je $\triangle BNI$ pravougli trougao.

**2.** Neka je $I$ centar upisanog kruga trougla $\triangle ABC$ (AB<BC), $k$ krug opisan oko trougla $\triangle ABC$ i tačka $P$ presječna tačka poluprave $pp[B,I)$ i kruga $k$. Dokazati da je $\triangle AIP$ jednakokraki.

**3.** Postoji li trougao čije su dužine visina $h_a = 2\,cm$, $h_b = 4\,cm$ i $h_c = 6\,cm$?

**4.** Neka je $I$ centar upisanog kruga trougla $\triangle ABC$ (AB<BC). Neka je $k$ krug opisan oko trougla $\triangle ABC$ i tačka $P$ središte luka AC (kojem ne pripada tačka B) kruga $k$. Dokazati da $I$ pripada duži $BP$.

**5.** Dokazati da su dva trougla $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ podudarna ako je $c = c'$, $h_c = h_{c'}$ i $t_c = t_{c'}$, gdje su $h_c$ i $h_{c'}$ visine, a $t_c$ i $t_{c'}$ težišnice trougla $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ redom na stranice $c$ i $c'$.

**6.** Iz jednog tjemena oštrouglog trougla konstruisana je visina, iz drugog simetrala ugla a iz trećeg težišna duž. Dokazati da trougao kojeg obrazuju njihove presječne tačke ne može biti jednkostraničan.

**7.** Dat je krug $k$ sa centrom u tački $S$ i prečnikom $AB$ $(A, B \in k,\ S \in AB)$. Na krugu $k$ odrediti tačku $C$ tako da zbir duži $AC + BC$ bude najveći. Odgovor obrazložiti.

# Četverougao

## Paralelogram

**1.** Definicija paralelograma: Paralelogram je četverougao ako i samo ako ima paralelne one stranice koje su suprotne jedna drugoj. Koristeći isključivo ovu definiciju, teoreme o podudarnosti trouglova i teoremu o podudarnosti uglova na transferzali dokazati sljedeću tvrdnju: Četverougao $\square ABCD$ je paralelogram akko ima jedan par suprotnih stranica koje su istovremeno paralelne i podudarne.

**2.** Definicija paralelograma: Paralelogram je četverougao ako i samo ako ima paralelne one stranice koje su suprotne jedna drugoj. Koristeći isključivo ovu definiciju i teoreme o podudarnosti trouglova dokazati sljedeću tvrdnju: Četverougao $\square ABCD$ je paralelogram akko ima podudarne suprotne stranice.

**3.** Definicija paralelograma: Paralelogram je četverougao akko ima paralelne one stranice koje su suprotne jedna drugoj. Koristeći isključivo ovu definiciju, teoreme o podudarnosti trouglova i teoremu o podudarnosti uglova na transferzali, dokazati sljedeću tvrdnju: Četverougao $\square ABCD$ je paralelogram akko mu se dijagonale polove.

**4.** Koristeći isključivo formulu za površinu pravouglog trougla ($P = \frac{a \cdot b}{2}$, gdje su $a$ i $b$ katete) izvesti formulu za površinu paralelograma ($P = a \cdot h$, gdje je $AB = a$, a $h$ udaljenost između stranica $AB$ i $CD$).

**5.** Svaka prava koja sadrži presjek dijagonala paralelograma i siječe jednu stranicu, siječe i suprotnu stranicu. Njen odsječak je raspolovljen presječnom tačkom dijagonala. Dokazati.

## Pravougaonik i kvadrat

**1.** Posmatrajmo površine devet različitih kvadrata $P_{11}$, $P_{12}$, $P_{13}$, $P_{21}$, $P_{22}$, $P_{23}$, $P_{31}$, $P_{32}$ i $P_{33}$. Za ove površine znamo da vrijedi jednakost $P_{11} + P_{12} + P_{13} = P_{21} + P_{22} + P_{23} = P_{31} + P_{32} + P_{33} = P_{11} + P_{21} + P_{31} = P_{12} + P_{22} + P_{32} = P_{13} + P_{23} + P_{33} = P_{11} + P_{22} + P_{33} = P_{13} + P_{22} + P_{31}$. Ako su $P_{12} = 21$, $P_{13} = 14$, $P_{23} = 19$ i $P_{31} = 20$, diskutovati da li se mogu odrediti površine $P_{11}$, $P_{22}$ i $P_{33}$.

**2.** Zadan je kvadrat $\square ABCD$ dužine stranice $1\,dm$. Naći poluprečnik kružnice koja dodiruje njegove dvije stranice i prolazi kroz njegov jedan vrh.

**3.** Pravougaonik je podjeljen na 9 manjih pravougaonika. Površine pet od njih su 5, 3, 9, 2 i 2 $cm^2$ (vidi sliku). Odrediti površinu pravougaonika.

| | | |
|---|---|---|
| 5 | 3 | 2 |
| | 9 | |
| | | 2 |

## Trapez

**1.** Definicija trapeza: Trapez je četverougao koji ima tačno jedan par paralelnih stranica. Obrazložiti odgovor na pitanje: Da li je paralelogram trapez? Koristeći isključivo formulu za površinu pravouglog trougla ($P = \frac{ab}{2}$) izvesti formulu za površinu trapeza ($P = \frac{1}{2}(a + c)h$ gdje su $a$ i $c$ dužine dvije paralelne stranice, a $h$ udaljenost između njih).

**2.** Ako su kraci trapeza međusobno normalni, dokazati da je zbir kvadrata osnovica jednak zbiru kvadrata dijagonala.

**3.** Dijagonala razbija jednakokraki trapez na dva jednakokraka trougla. Odrediti uglove tog trapeza.

**4.** U jednakokrakom trapezu srednja linija ima dužinu $5\,cm$, a dijagonala je dva puta duža od srednje linije. Kolika je površina tog trapeza?

## Tetivni četverougao, centralni i periferiski ugao

**1.** Dokazati da je suma oštrog i tupog periferiskog ugla nad istom tetivom $180°$.

**2.** Dokazati da je ugao između tangente i tetive jednak periferiskom uglu nad tom tetivom.

## Pravilni mnogouglovi

**1.** U dati pravilni šestougao upisati 8 podudarnih četverouglova (Prisjetimo se osobina pravilnog šestougla: pravilan šestougao ima $ABCDEF$ ima šest podudarnih stranica, šest podudarnih uglova, tri para paralelnih suprotnih stranica ($AB||ED$, $BC||EF$, $CD||AF$) i dijagonale $AD$, $BE$ i $CF$ se polove). Obrazložiti ideju koja vas je dovela do rješenja.

**2.** Polazeći isključivo od formule za površinu pravouglog trougla ($P = \frac{ab}{2}$) izvesti formulu za površinu pravilnog šestougla $P = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$, gdje je $a$ dužina stranice.

**3.** Pravilan šestougao je šestougao kod koga su podudarne sve stranice i podudarni svi uglovi. Dat je pravilan šestougao ABCDEF. Polazeći od definicije pravilnog šestougla (pretpostavljajući da više ništa ne znamo o pravilnom šestouglu) dokazati da se dijagonale $AD$, $CF$ i $BE$ sijeku u istoj tački $S$.

## Rotacija i osna simetrija

**1.** U $\triangle ABC$ je upisan krug $k(I, r)$. Centar opisanog kruga $k''(M, r'')$ oko $\triangle BCI$ nalazi se na presjeku $pp[A, I]$ i kruga $k'(S, r')$ koji je opisan oko $\triangle ABC$. Spomenute krugove i trouglove nacrtati na proizvoljan način. Nakon toga krug $k$ preslikati osnom simetrijom s osom u pravoj $p(C, M)$ gdje je $M$ centar kruga $k''$.

**2.** Jednakokraki trougao $\triangle ABC$ čiji je obim $O = 64\,cm$, a visina na osovici $h_a = 24\,cm$ rotirati oko vrha $B$ za ugao od $90°$ u pozitivnom smjeru. Izračunati površinu novonastalog rotiranog trougla.

**3.** Jednakokraki trapez $\square ABCD$ sa osnovicom $AB = 7\,cm$ rotirati oko tačke $C$ za ugao od $120°$ u pozitivnom smjeru.

## Konstrukcija prave

**1.** Data je prava $p$, tačka $A$ i oštar ugao $\alpha$. Konstruisati pravu koja prolazi kroz datu tačku $A$ ($A \notin p$) i siječe datu pravu $p$ pod uglom $\alpha$.

**2.** Kroz datu tačku $M$ van date prave $p$ konstruisati pravu koja siječe datu pravu pod uglom od $20°$. (Ugao od $20°$ konstruisati približno tačno.)

**3.** Dat je trougao $\triangle ABC$. Konstruisati pravu $p$ koja je jednako udaljena od vrhova $A$, $B$ i $C$ datog trougla.

## Konstrukcija trougla i četverougla

**1.** Konstruisati pravougli trougao kome je data hipotenuza i jedan oštar ugao.

**2.** Konstruisati pravougli trougao $\triangle ABC$ ako su poznati kateta $b$ i visina $h_c$ koja odgovara hipotenuzi c.

**3.** Konstruisati četverougao $\square ABCD$ ako su date dužine njegovih stranica $AB = 8\,cm$, $BC = 6\,cm$, $CD = 5\,cm$ i $AD = 7\,cm$. Da li se u ovaj četverougao može upisati krug?

## Razni zadaci

**1.** Težišnica i visina iz vrha A u $\triangle ABC$ djele ugao $\alpha$ na tri jednaka dijela. Koliki su uglovi trougla $\triangle ABC$.

**2.** Dat je krug $k_1(O_1, r_1)$ i u njegovoj unutrašnjosti krug $k_2(O_2, r_2)$ takav da dodiruje krug $k_1$ u tački $P$. Dokazati da su tačke $O_1$, $O_2$ i $P$ kolinearne.

**3.** Tačka $D$ je podnožje visine koja odgovara hipotenuzi $AB$ pravouglog trougla $\triangle ABC$, a $M$ i $N$ su redom sredine duži $CD$ i $BD$. Dokazati da $p(A, M) \perp p(C, N)$.

**4.** Na pravoj $p(A, B)$ trougla $\triangle ABC$ data je tačka $M$ takva da je $A - B - M$ i $BM \cong BC$. Dokazati da je prava $p(M, C)$ paralelna simetrali ugla.

**5.** U četverougao $\square ABCD$ je $AB < BC < CD < AD$ i svake dvije susjedne stranice se razlikuju za $2\,cm$ (izuzev $AB$ i $AD$). Naći površinu četverougla, ako mu je obim $36\,cm$ i ako dijagonala $AC$ pripada simetrali ugla $\measuredangle BAD$.

**6.** Date su dvije paralelne prave $a$ i $b$, date su tačke $A \in a$, $B \in b$ i tačka $C$ koja se nalazi "između" pravih $a$ i $b$. Ako je $\measuredangle CAa = 30^\circ$ i $\measuredangle CBb = 45^\circ$ izračunati ugao $\measuredangle ACB$.

**7.** Neka je $k$ krug koji je opisan oko trougla $\triangle ABC$, $AB < AC$ i neka je tačka $N$ središte luka $AC$ (kojem pripada i tačka $B$) kruga $k$. Dalje, neka je $M$ središte duži $AC$ i $P \neq N$ tačka presjeka prave $p(N, M)$ i opisanog kruga. Dokazati da je $NP$ prečnik opisanog kruga.

# Euklidska geometrija 1

**1.** Nabrojati svih pet stavova o podudarnosti trouglova! Koju dodatnu osobinu stav SSU mora zadovoljiti?

**2.** Četverougao je tetivni akko...

**3.** Kako glasi prvi potreban i dovoljan uslov da bi četverougao bio tetivni (zbir dva naspremna ugla...).

**4.** Kako glasi drugi potreban i dovoljan uslov da bi četverougao bio tetivni (uglovi koji gledaju na...).

**5.** Četverougao je paralelogram akko ima paralelne one stranice...

**6.** Kako glasi prvi potreban i dovoljan uslov da bi četverougao bio paralelogram (četverougao je paralelogram akko ima podudrne one stranice......)

**7.** Kako glasi drugi potreban i dovoljan uslov da bi četverougao bio paralelogram (četverougao je paralelogram akko ima najmanje jedan par suprotnih stranica koje su istovremeno...)

**8.** Kako glasi treći potreban i dovoljan uslov da bi četverougao bio paralelogram (četverougao je paralelogram akko mu se dijagonale...)

**9.** Kako glase definicije centralnog ugla nad tetivom, centralnog ugla nad lukom, periferiskog ugla nad tetivom, periferiskog ugla nad lukom (centralni ugao nad tetivom je ugao čiji se vrh nalazi na centru kruga a njegovi kraci prolaze kroz krajnje tačke tetive...)

**10.** U kakvom su odnosu centralni i periferiski ugao nad tetivom?

**11.** Zbir oštrog i tupog periferiskog ugla nad istom tetivom iznosi...

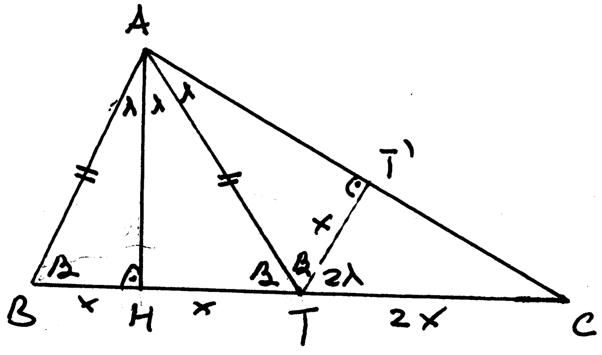
**12.** Šta je $\pi$? Šta je stepen? Šta je pravi ugao? Kako pomoću šestara podjeliti ugao na tri dijela sa približnom tačnošću?

**13.** Šta je srednja linija trougla i koje osobine ima?

**14.** Kakvu osobinu imaju odsječi tangenti na krug?

(#) Težišnica i visina iz vrha $A$ u $\triangle ABC$ dijele ugao $\alpha$ na tri jednaka dijela. Koliki su uglovi trougla $\triangle ABC$?

Rj.




Uvedimo oznake za vrhove i uglove kao na slici.

Primijetimo da je zbog podudarnosti USU $\triangle AHB \cong \triangle AHT$

$$\Downarrow$$

$$BH \cong HT = x$$

Neka je $T'$ ortogonalna projekcija tačke $T$ na $AC$.

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle TT'A \cong \measuredangle ABH = 90^\circ \\ \measuredangle TAT' \cong \measuredangle BAH = \lambda \\ TA \cong BA \end{array}\right\} \overset{UUS}{\Longrightarrow} \triangle TT'A \cong \triangle BHA$$

$$\Downarrow$$

$$BH \cong TT' = x \quad i \quad \measuredangle T'TA \cong \measuredangle HBA = \beta$$

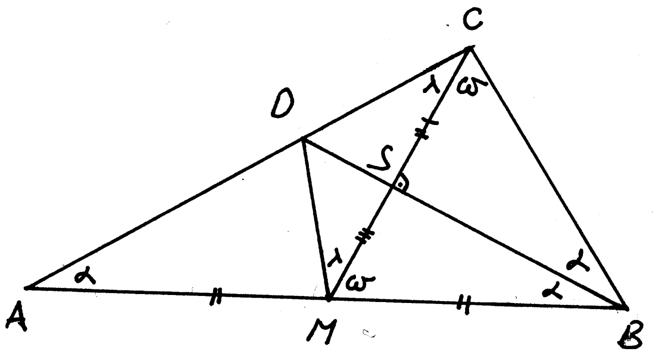
Kako je $2\beta + 2\lambda = 180^\circ \Rightarrow \measuredangle CTT' = 2\lambda$. $\triangle TT'C$ je pravougli pa

$$\cos 2\lambda = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\lambda = 60^\circ \Rightarrow \lambda = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = 90^\circ, \quad \beta = 60^\circ, \quad \gamma = 30^\circ$$

(#) U trouglu $\Delta ABC$ je $\sphericalangle ABC = 2\sphericalangle BAC$ i težišna linija $CM$ je normalna (ortogonalna) na $BD$ ugla $\sphericalangle ABC$. Odrediti uglove trougla $\Delta ABC$.

Rj.




$CM$ težišna duž

$BD$ simetrala

$BD$ simetrala i

Kako je $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle ABC = 2\sphericalangle BAC = 2\alpha$

to je $\sphericalangle ABD = \sphericalangle CBD = \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta ABD$ jkk sa osnovicom $AB \Rightarrow DM$ visina trougla $\Delta ABD$

Neka je $\{S\} = CM \cap BD$

$$\left.\begin{aligned} \sphericalangle MSB &\cong \sphericalangle CSB = 90^\circ \\ BS &\cong BS \\ \sphericalangle MBS &\cong \sphericalangle CBS = \alpha \end{aligned}\right\} \overset{USU}{\Longrightarrow} \Delta MBS \cong \Delta CBS$$

$$\Downarrow$$

$MS \cong CS$ i $\sphericalangle BMS \cong \sphericalangle BCS = \omega$

Dalje imamo

$$\left.\begin{aligned} MS &\cong CS \\ \sphericalangle MSD &\cong \sphericalangle CSD = 90^\circ \\ DS &\cong DS \end{aligned}\right\} \overset{SUS}{\Longrightarrow} \Delta MSD \cong \Delta CSD$$

$$\Downarrow$$

$\sphericalangle DMS \cong \sphericalangle DCS = \lambda$

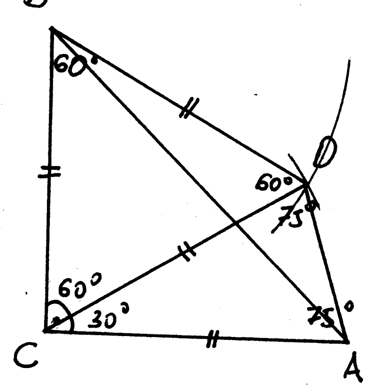
$\gamma = \lambda + \omega$ i $\lambda + \omega = 90^\circ$ ($DM$ je visina $\Delta ABD$) $\Rightarrow \gamma = 90^\circ$

$3\alpha + \gamma = 180^\circ \Rightarrow 3\alpha = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ$ ; $\beta = 60^\circ$.

(#) Dat je jednakokraki - pravougli trougao $\triangle ABC$ s pravim uglom kod vrha C. Nad stranicom (katetom) BC konstruisan je jednakostranični trougao $\triangle BCD$ (razlikovati dva slučaja, kad je tačka D sa one strane prave $p(A,B)$ sa koje nije tačka C i kad je tačka D sa one strane prave $p(B,C)$ sa koje nije tačka A). Izračunati veličinu ugla $\measuredangle ADB$.

Rj.

a)




$\triangle BCD$ jks $\Rightarrow$ $\measuredangle DBC = \measuredangle BCD = \measuredangle CDB = 60^\circ$

$\triangle ABC$ pravougli $\Rightarrow$ $\measuredangle ACD = 30^\circ$

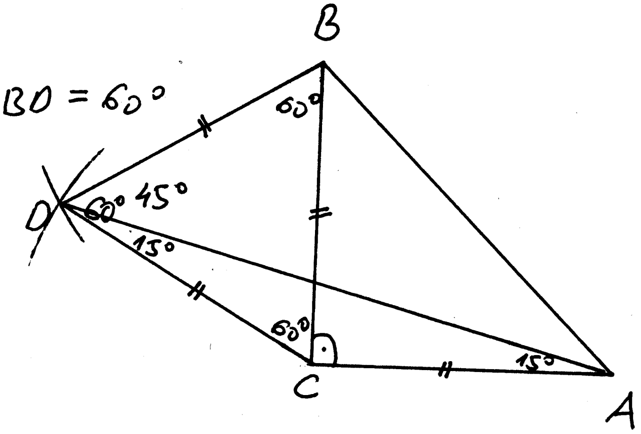
$\triangle ACD$ jkk sa osnovicom AD

$\Rightarrow$ $\measuredangle CAD = \measuredangle ADC = 75^\circ$

$\measuredangle ADB = 135^\circ$

b)

$\triangle BCD$ jkk $\Rightarrow$ $\measuredangle BCD = \measuredangle BDC = \measuredangle CBD = 60^\circ$




$\measuredangle ACD = 150^\circ$

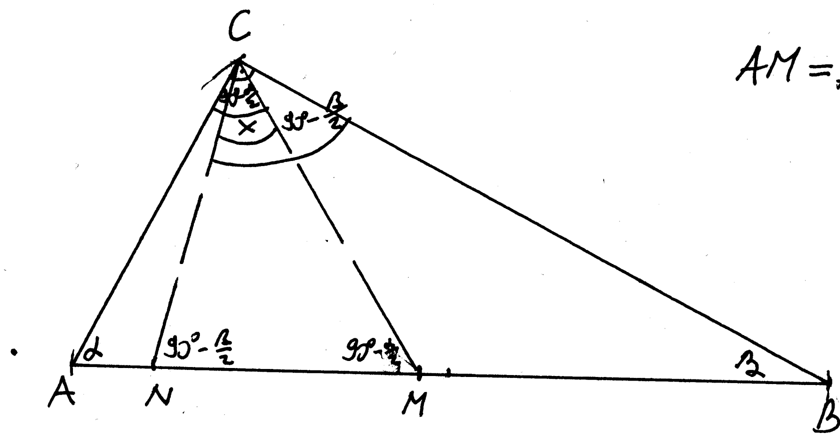
$\triangle ACD$ jkk sa osnovicom AD

$\Rightarrow$ $\measuredangle CAD = \measuredangle ADC = 15^\circ$

$\measuredangle ADB = 45^\circ$

(#) Na hipotenuzi $AB$ pravouglog trougla $\Delta ABC$ date su tačke $M$ i $N$ tako da je $AM = AC$, $BN = BC$ i poredak $A-N-M-B$. Izračunati ugao $\measuredangle MCN$.

R:




$AM = AC \Rightarrow \Delta AMC$ jkk

$\Rightarrow \measuredangle AMC = \measuredangle ACM = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$

$BN = BC \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta BCN$ jkk

$\Rightarrow \measuredangle BNC = \measuredangle BCN = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$

Traženi ugao $\measuredangle MCN$ označimo sa $x$. Sad imamo

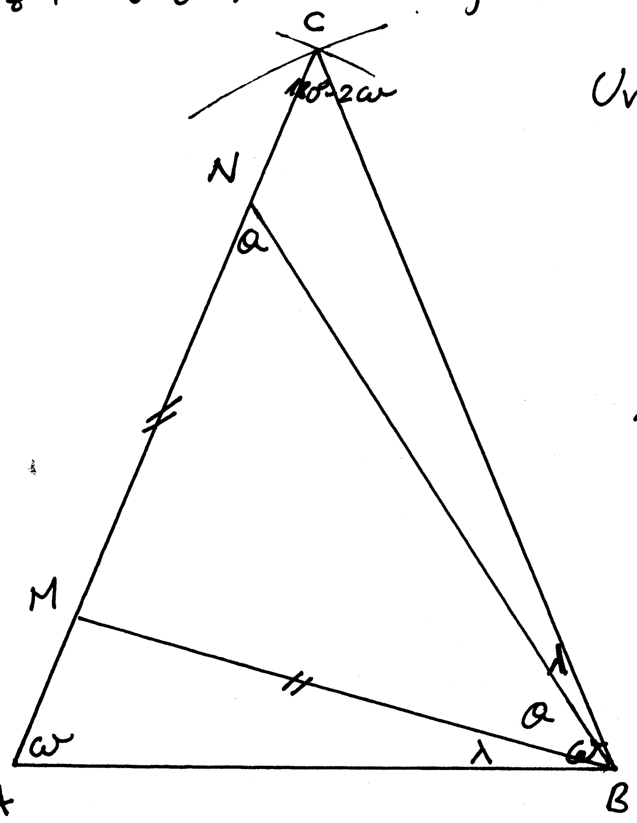
$$\left.\begin{array}{ll} \Delta MCN \Rightarrow & 90^\circ - \frac{\beta}{2} + 90^\circ - \frac{\alpha}{2} + x = 180^\circ \\ \measuredangle BCA \Rightarrow & 90^\circ - \frac{\alpha}{2} + 90^\circ - \frac{\beta}{2} - x = 90^\circ \end{array}\right\} - \Rightarrow$$

$2x = 90^\circ \Rightarrow x = 45^\circ$

$\measuredangle NCM = 45^\circ$.

(#) Dat je jednakokraki trougao $\Delta ABC$ ($AC = BC$). Na kraku $AC$ odabrane su dvije tačke $M$ i $N$ tako da je $\measuredangle ABM \cong \measuredangle CBN$ i $MN \cong MB$, pri čemu je tačka $M$ bliža tački $A$ nego tačka $N$. Koliki je ugao $\measuredangle ABN$?

Rj.




Uvedimo oznake

$\measuredangle ABM \cong \measuredangle CBN = \lambda$
(prema pretpostavci)

$\Delta ABC$ jkk $\Rightarrow \measuredangle ABC \cong \measuredangle BAC = \omega$.

$\Delta BMN$ jkk $\Rightarrow \measuredangle MBN \cong \measuredangle BNM = \theta$.

Sad primjetimo

$\measuredangle ABC = 180° - 2\omega$

Kako je $\measuredangle BNA$ vanjski ugao $\Delta ABC$ to je

$\theta = 180° - 2\omega + \lambda$

(kako je $\measuredangle BMA$ vanjski ugao $\Delta ABM$) $\Rightarrow$

$\measuredangle AMB = 2\theta = 360° - 4\omega + 2\lambda$

Posmatrajmo trougao $\Delta ABM$.

$\underline{\omega} + \lambda + 360° \underline{- 4\omega} + 2\lambda = 180°$

$3\omega - 3\lambda = 180° \quad /:3$

$\omega = 60° + \lambda \quad \Rightarrow \quad \theta = 180° - 120° - 2\lambda + \lambda$

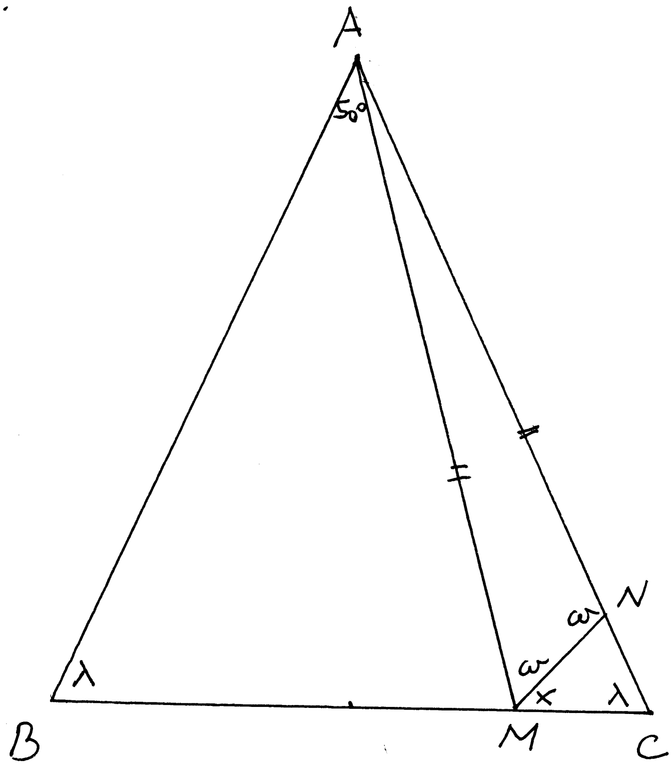
$\theta = 60° - \lambda$

Na kraju $\measuredangle ABN = \lambda + \theta = \lambda + 60° - \lambda = 60°$

$\measuredangle ABN = 60°$.

(#) Zadan je jednakokraki trougao $\Delta ABC$ sa osnovicom $BC$ tako da je ugao $\sphericalangle BAC > 50°$. Na osnovici $BC$ data je tačka $M$ takva da je ugao $\sphericalangle BAM = 50°$, a na kraku $AC$ tačka $N$ takva da je $AM \cong AN$. Koliki je ugao $\sphericalangle CMN$.

Rj.




$\sphericalangle MNA$ je vanjski ugao $\Delta MCN$

$$\omega = x + \lambda \quad \ldots(1)$$

$\sphericalangle AMC$ je vanjski ugao $\Delta ABM$

$$50° + \lambda = \omega + x \quad \ldots(2)$$

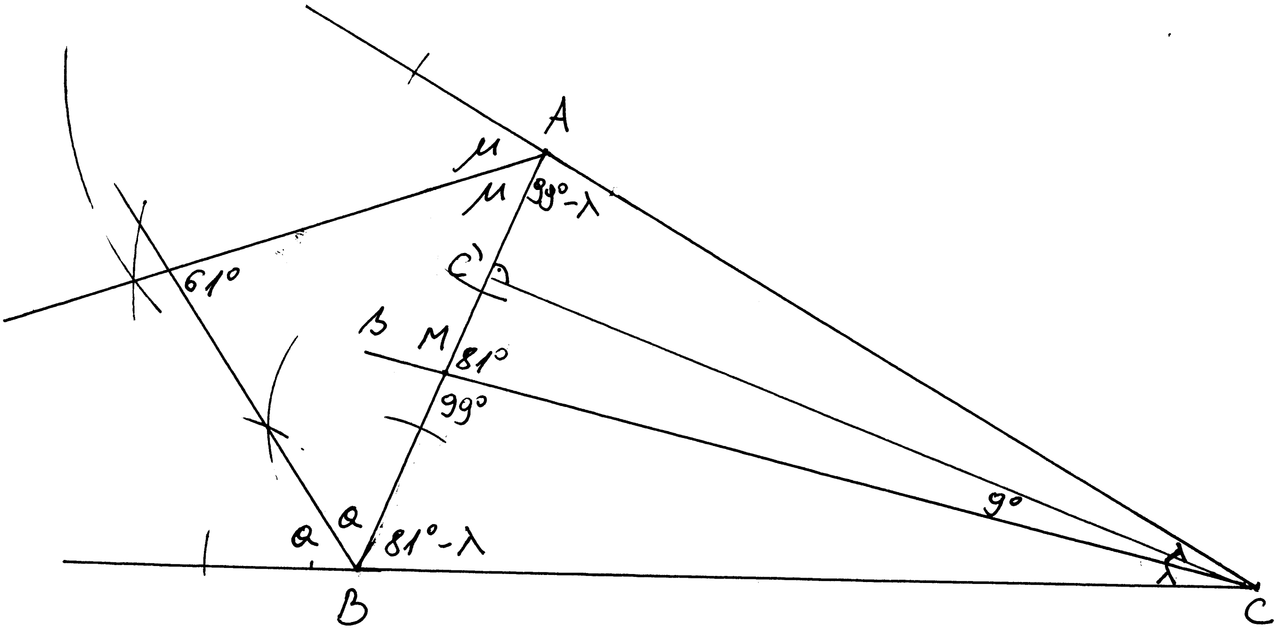
(1)+(2): $\underline{\underline{\omega}} + 50° + \underline{\lambda} = x + \underline{\lambda} + \underline{\underline{\omega}} + x$

$$2x = 50°$$

$$x = 25°$$

\# U oštrouglom trouglu $\Delta ABC$ $(AC < BC)$ visina $h_c = CC'$ i simetrala $s = p(C,M)$ ugla $\gamma$ zaklapaju ugao od $9°$, a simetrale spoljašnjih uglova kod tjemena $A$ i $B$ sijeku se pod uglom od $61°$. Odrediti uglove $\Delta ABC$.

Rj.




Uvedimo oznake kao na slici.

$\Delta CMC'$ pravougli $\Rightarrow$ $\measuredangle CMC' = 81°$ ; $\measuredangle BMC = 99°$

$$\Rightarrow \quad \alpha = 99° - \lambda \quad ; \quad \beta = 81° - \lambda$$

$$\left.\begin{array}{l} 2\mu + 99° - \lambda = 180° \Rightarrow 2\mu = 81° + \lambda \\ 2\theta + 81° - \lambda = 180° \Rightarrow 2\theta = 99° + \lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 2\mu + 2\theta = 180° + 2\lambda \quad \ldots (*)$$

$$\theta + \mu + 61° = 180° \quad / \cdot 2$$

$$2\theta + 2\mu + 122° = 360°$$

$$2\theta + 2\mu = 238° \quad \ldots (**)$$

$(*) ; (**) \Rightarrow$

$$180° + 2\lambda = 238°$$

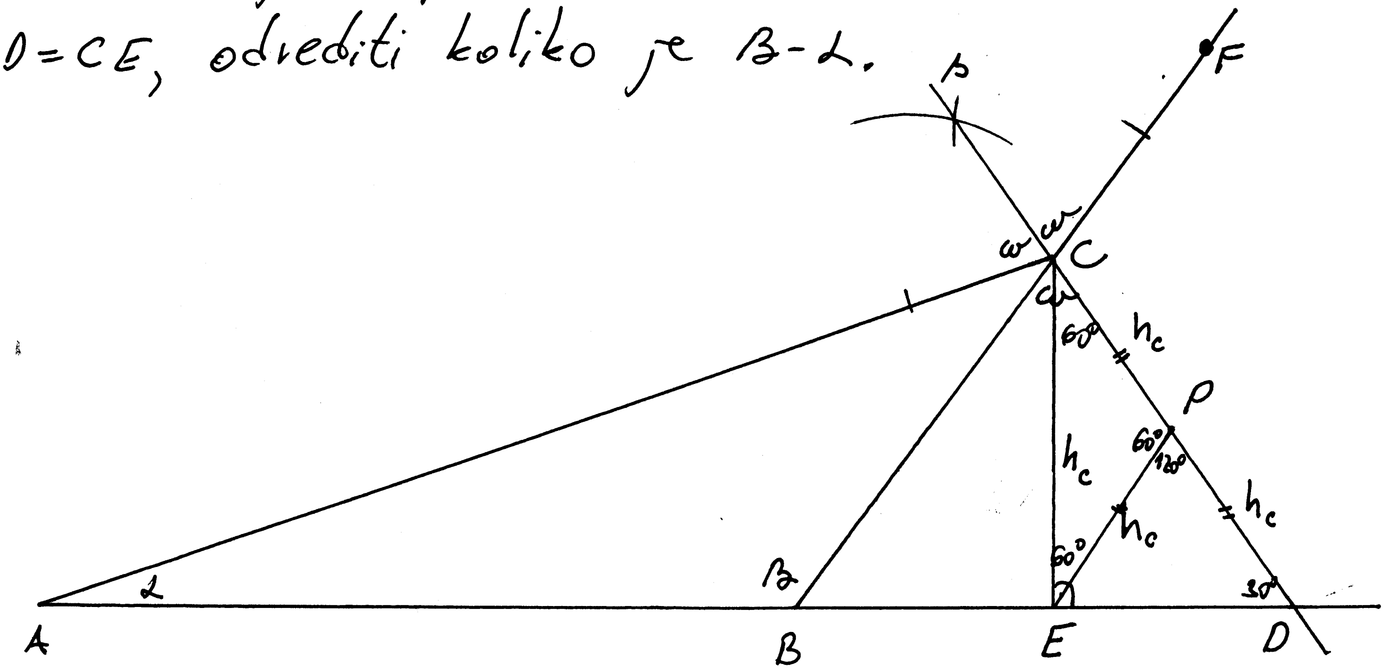
$$2\lambda = 58°$$

$$\lambda = 29°$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = 70°, \quad \beta = 52° \quad ; \quad \gamma = 58°$$

(#) Nacrtaj trougao $\Delta ABC$, $(\beta > \alpha)$ i visinu $h_c$ iz vrha C. Tačku u kojoj visina $h_c$ iz vrha C siječe pravu AB označi sa E. Produži stranicu BC preko vrha C, te konstruiši simetralu vanjskog ugla uz vrh C. Tačku u kojoj simetrala siječe pravu $p(A,B)$ označi sa D. Ako je $\frac{1}{2}CD = CE$, odrediti koliko je $\beta - \alpha$.

Rj.




Označimo sa s simetralu vanjskog ugla uz vrh C. Ako $\measuredangle ACF$ označimo sa $2\omega$ (gdje je $F \in pp[B,C)$ t.d. $B-C-F$) primjetimo da je $\measuredangle BCD = \omega$ (unakrsni uglovi).

Sad posmatrajmo $\Delta EDC$ (pravougli trougao) kod koga imamo da je $CD = 2h_c$. Ako sa P označimo sredinu stranice CD možemo primjetiti da je $CP = DP = h_c$ i da je $EP = h_c$ (ZAŠTO?).

$\Delta EPC$ jks $\Rightarrow \measuredangle EPC = 60° \Rightarrow \measuredangle EPD = 120° \overset{\Delta EDP \text{ jk}}{\Rightarrow} \measuredangle EDP = 30°$.

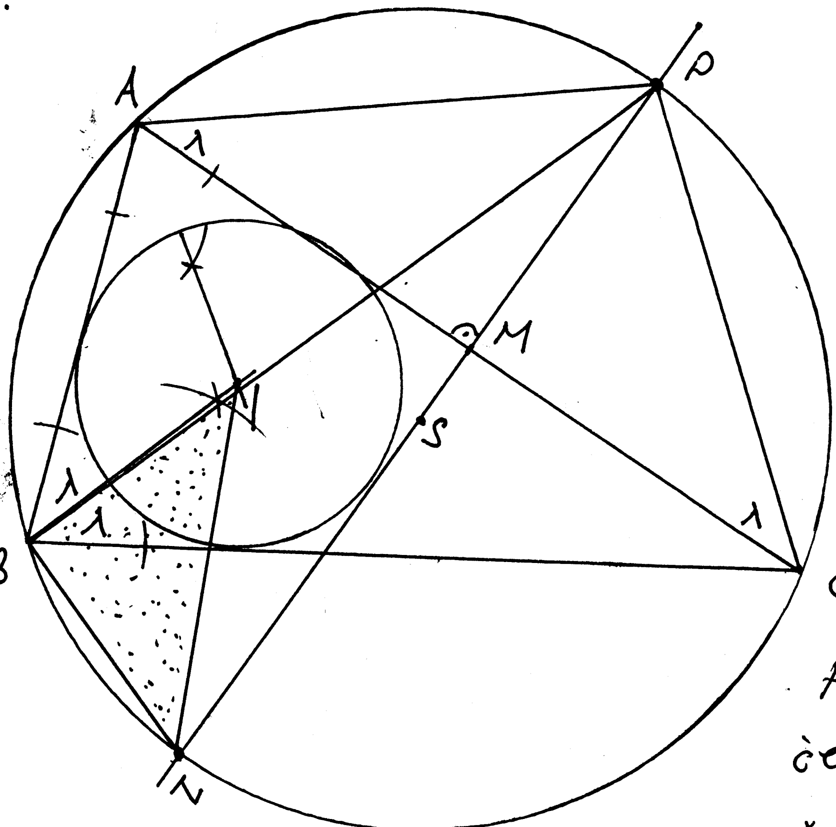
Ugao $\measuredangle ACF$ vanjski ugao $\Delta ABC \Rightarrow 2\omega = \alpha + \beta$ ...(1)

Ugao $\measuredangle ABC$ vanjski ugao $\Delta BDC \Rightarrow \beta = \omega + 30°$ tj. $\omega = \beta - 30°$ ...(2)

(1) i (2) $\Rightarrow 2\beta - 60° = \alpha + \beta \Rightarrow \beta - \alpha = 60°$ ← traženi rezultat

(#) Neka je $I$ centar upisanog kruga $\triangle ABC$ $(AB < BC)$, tačka $S$ centar opisanog kruga $k$ oko trougla $\triangle ABC$ i tačka $M$ sredina stranice $AC$. Ako su $P$ i $N$ tačke dobijene presjekom prave $p(M,S)$ i kruga $k$ (gdje su tačke $B$ i $N$ sa jedne strane, a tačka $P$ sa druge strane prave $p(A,C)$), dokazati da je $\triangle BNI$ pravougli.

Rj.




Posmatrajmo trouglove $\triangle AMP$ i $\triangle PMC$. Imamo

$AM \cong MC$ ($M$ središte $AC$)

$\sphericalangle AMP \cong \sphericalangle CMP = 90^\circ$ ($S$-$M$-$P$ i tačka $S$ leži na simetrali stranice $AC$)

$PM \cong PM$

$\overset{SUS}{\Longrightarrow}$

$\overset{SUS}{\Longrightarrow} \triangle AMP \cong \triangle CMP$

$\Downarrow$

$\sphericalangle PAM \cong \sphericalangle PCM = \lambda$

Posmatrajmo sad tetivni četverougao $\square BCPA$. Imamo

$\sphericalangle ABP \cong \sphericalangle PCA = \lambda$ i

$\sphericalangle PBC \cong \sphericalangle PAC = \lambda$

$\Rightarrow$ pp$[B,P)$ je simetrala ugla $\sphericalangle ABC$ tj. tačka $I \in BP$.

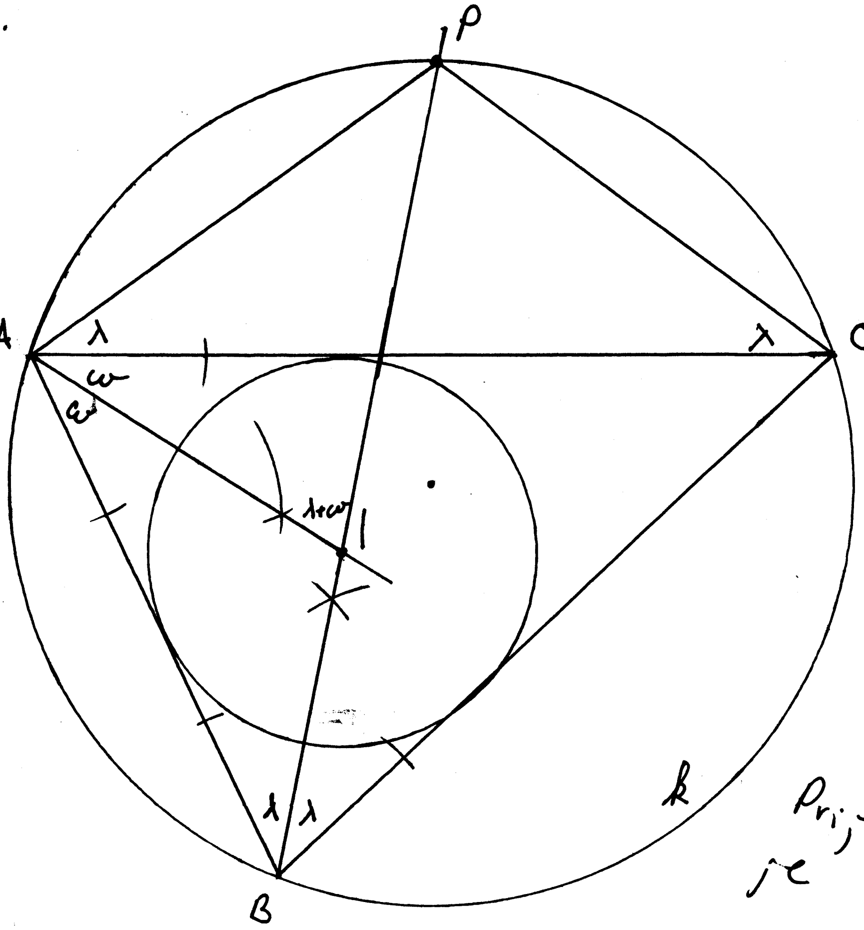
Ugao nad prečnikom je prav pa $\sphericalangle NBP = 90^\circ$ tj.

$\sphericalangle NBI = 90^\circ \Rightarrow \triangle NBI$ je pravougli

q.e.d.

# Neka je I centar upisanog kruga trougla $\Delta ABC$ ($AB < BC$), $k$ krug opisan oko trougla $\Delta ABC$ i tačka $P$ presječna tačka poluprave $pp[B,I)$ i kruga $k$. Dokazati da je $\Delta AIP$ jednakokraki.

Rj.




Tačka I leži na presjeku simetrala uglova pa imamo da je $\measuredangle ABP \cong \measuredangle CBP = \lambda$. Četverougao $\square ABCP$ je tetivni pa možemo zaključiti da je

$\measuredangle PAC = \measuredangle PBC = \lambda$ i

$\measuredangle PCA = \measuredangle ABP = \lambda$

Posmatrajmo sad $\Delta AIP$. Prije toga primjetimo da je $\measuredangle BAI \cong \measuredangle CAI = \omega$

(ZAŠTO?)

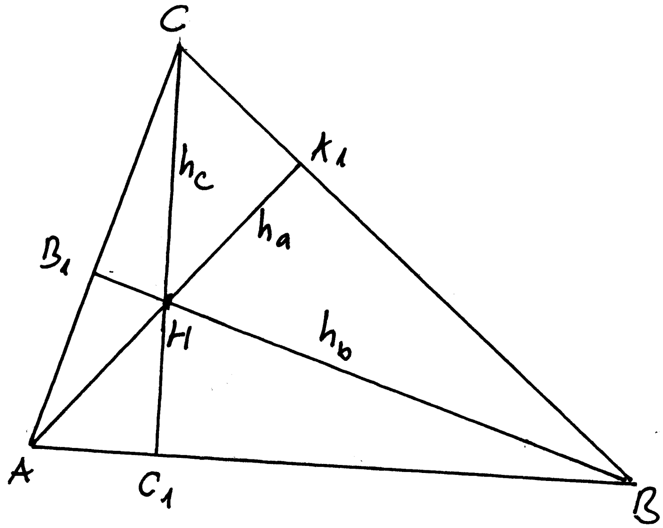
U trouglu $\Delta PAI$ $\measuredangle PAI = \lambda + \omega$. Ugao $\measuredangle AIP$ je vanjski ugao trougla $\Delta AIB$ pa je $\measuredangle PIA = \measuredangle ABI + \measuredangle IAB = \lambda + \omega$ (vanjski ugao trougla jednak je zbiru unutrašnja dva nesusjedna ugla). Prema tome $\measuredangle PAI \cong \measuredangle AIP = \lambda + \omega$

$\Rightarrow$ $\Delta API$ je jkk

q.e.d.

7. Postoji li trougao čije su dužine visina $h_a = 2\ cm$, $h_b = 4\ cm$ i $h_c = 6\ cm$?

Rj.




$h_a = 2\ cm$

$$P = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{2a}{2} = a$$

$h_b = 4\ cm$

$$P = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{4b}{2} = 2b$$

$h_c = 6\ cm$

$$P = \frac{c \cdot h_c}{2} = \frac{6c}{2} = 3c$$

Sad imamo

$$a = 2b = 3c \quad \text{tj.} \quad b = \frac{1}{2}a$$

$$c = \frac{1}{3}a$$

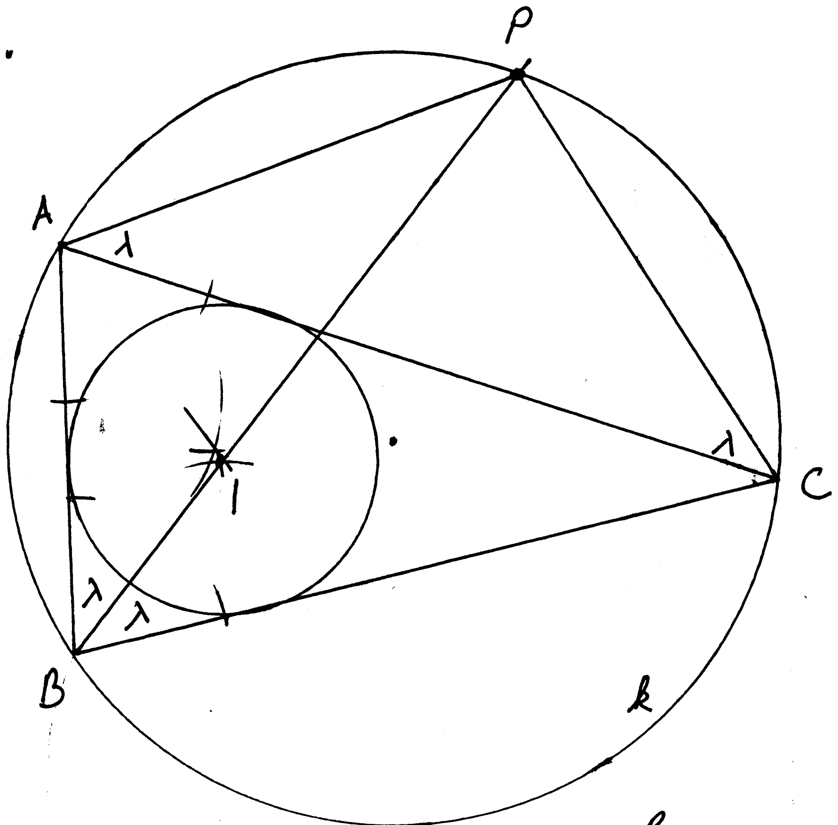
Kako je

$$b + c = \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}a = \frac{5}{6}a \quad \text{tj.} \quad b + c < a$$

trougao sa datim dužinama visina ne postoji (zbir dvije stranice mora biti veći od treće).

(#) Neka je $I$ centar upisanog kruga trougla $\Delta ABC$ $(AB<BC)$. Neka je $k$ krug opisan oko trougla $\Delta ABC$ i tačka $P$ središte luka $\widehat{AC}$ (kojem ne pripada tačka $B$) kruga $k$. Dokazati da $I$ pripada duži $BP$.

Rj.




$P$ središte luka $AC$

$\Rightarrow$ $P$ je podjednako udaljena od tački $A$ i $C$ $\Rightarrow$ $\Delta ACP$ jk

$\Rightarrow$ $\sphericalangle PAC \cong \sphericalangle PCA = \lambda$.

Četverougao $\square ABCP$ je tetivni pa imamo da

$\sphericalangle PBC = \sphericalangle PAC = \lambda$ i

$\sphericalangle ABP \cong \sphericalangle ACP = \lambda$

pa je $BP$ simetrala ugla $\sphericalangle ABC$.

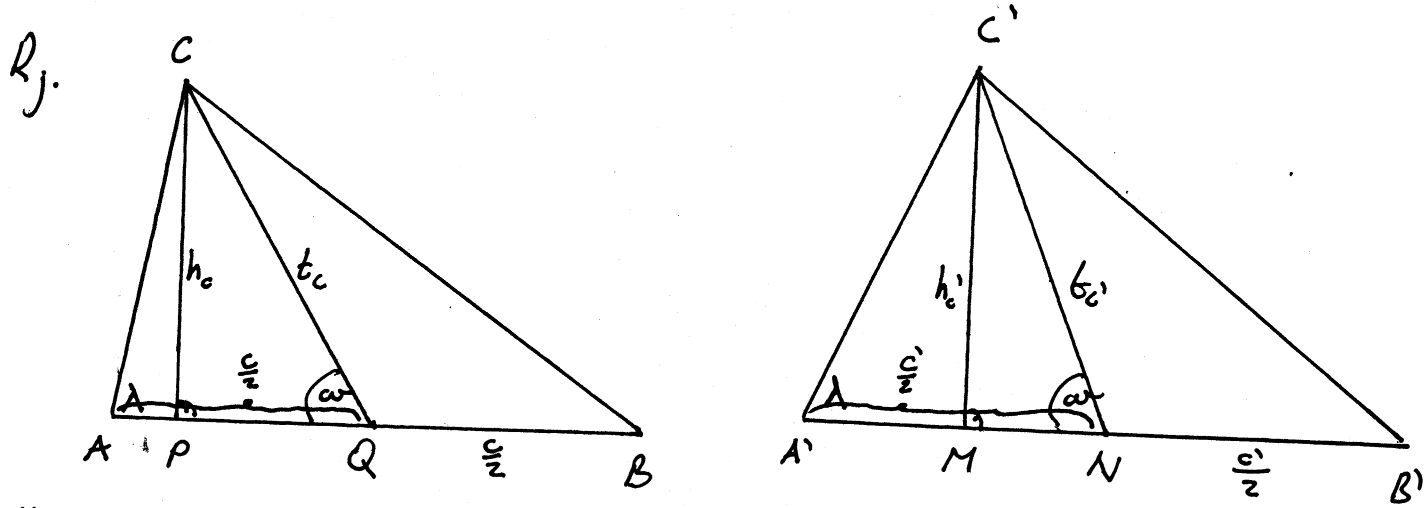
Kako je tačka $I$ presjek simetrala uglova to je

$I \in BP$

q.e.d.

# Dokazati da su dva trougla $\Delta ABC$ i $\Delta A'B'C'$ podudarna ako je $c=c'$, $h_c=h_{c'}$ i $t_c=t_{c'}$, gdje su $h_c$ i $h_{c'}$ visine, a $t_c$ i $t_{c'}$ težišnice trouglova $\Delta ABC$ i $\Delta A'B'C'$ redom iz vrhova $C$ i $C'$.

Rj.




Uvedimo oznake kao sa slike.
Posmatrajmo $\Delta PQC$ i $\Delta MNC'$.

$$\left.\begin{array}{l} CQ \cong C'N\ (t_c=t_{c'}) \\ CP \cong C'M\ (h_c=h_c') \\ \measuredangle CPQ \cong \measuredangle C'MN = 90^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{(ugao naspram veće stranice)}]{SSU} \begin{array}{c} \Delta PQC \cong \Delta MNC' \\ \Downarrow \\ \measuredangle AQC \cong \measuredangle A'NC' = \omega \end{array}$$

Kako je $c=c'$ to je i $\frac{c}{2}=\frac{c'}{2}$, pa posmatrajmo $\Delta AQC$ i $\Delta A'NC'$.

$$\left.\begin{array}{l} AQ \cong A'N\ (\frac{c}{2}=\frac{c'}{2}) \\ \measuredangle AQC \cong \measuredangle A'NC' = \omega \\ CQ \cong C'N\ (t_c=t_{c'}) \end{array}\right\} \xrightarrow{SUS} \begin{array}{c} \Delta AQC \cong \Delta A'NC' \\ \Downarrow \\ \measuredangle CAQ \cong \measuredangle C'A'N = \lambda \\ \text{i } AC \cong A'C' \end{array}$$

Na kraju posmatrajmo $\Delta ABC$ i $A'B'C'$.

$$\left.\begin{array}{l} AC \cong A'C' \\ \measuredangle CAB \cong \measuredangle C'A'B' = \lambda \\ AB \cong A'B' \end{array}\right\} \xrightarrow{SUS} \Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$$

q.e.d.

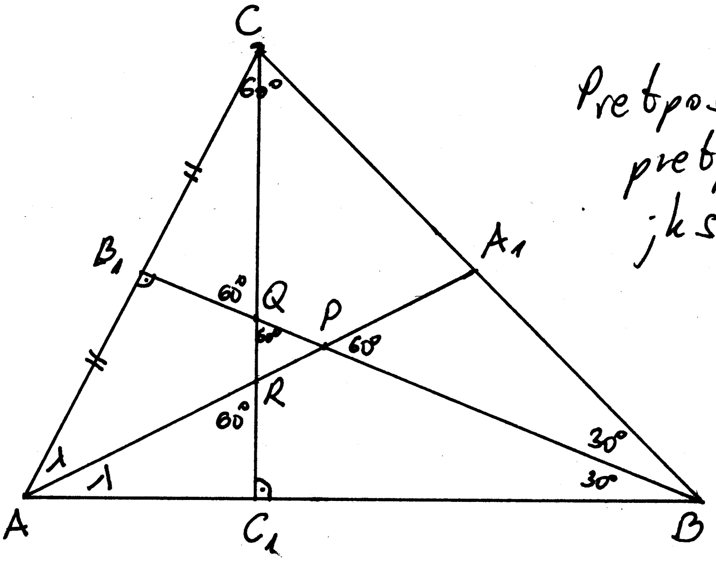
# Iz jednog temena oštrouglog trougla konstruisana je visina, iz drugog simetrala ugla a iz trećeg težišna duž. Dokazati da trougao koga obrazuju njihove presečne tačke ne može biti jednakostraničan.

R: postavka zadatka

$$\left.\begin{array}{l} \triangle ABC,\ CC_1 \text{ visina trougla} \\ AA_1 \text{ simetrala } \sphericalangle BAC \\ BB_1 \text{ težišna duž} \\ AA_1 \cap CC_1 = \{R\},\ AA_1 \cap BB_1 = \{P\} \\ BB_1 \cap CC_1 = \{Q\} \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle PQR \text{ nije jednakostraničan}$$

---

$\triangle ABC$ je raznostraničan trougao.




Pretpostavimo suprotno tvrdnji tj. pretpostavimo da je $\triangle PQR$ jks, tj. $\sphericalangle RPQ \cong \sphericalangle PQR \cong \sphericalangle QRP = 60°$.

$\triangle AC_1R \Rightarrow \lambda = 30°$

pa je $\sphericalangle BAC = 60°$

$\triangle C_1BQ \Rightarrow \sphericalangle ABB_1 = 30°$

$\triangle ABB_1\ (\sphericalangle B_1AB = 60°,\ \sphericalangle ABB_1 = 30°) \Rightarrow \sphericalangle BB_1A = 90°$

$$\left.\begin{array}{l} AB_1 \cong CB_1 \\ \sphericalangle BB_1A \cong \sphericalangle BB_1C = 90° \\ BB_1 \cong BB_1 \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \triangle BB_1A \cong \triangle BB_1C$$

$\Downarrow$

$\sphericalangle ABB_1 \cong \sphericalangle B_1BC = 30°$

i $\sphericalangle B_1AB \cong \sphericalangle B_1CB = 60°$

$\triangle ABC$ je jks $\Rightarrow P \equiv Q \equiv R$

#kontradikcija

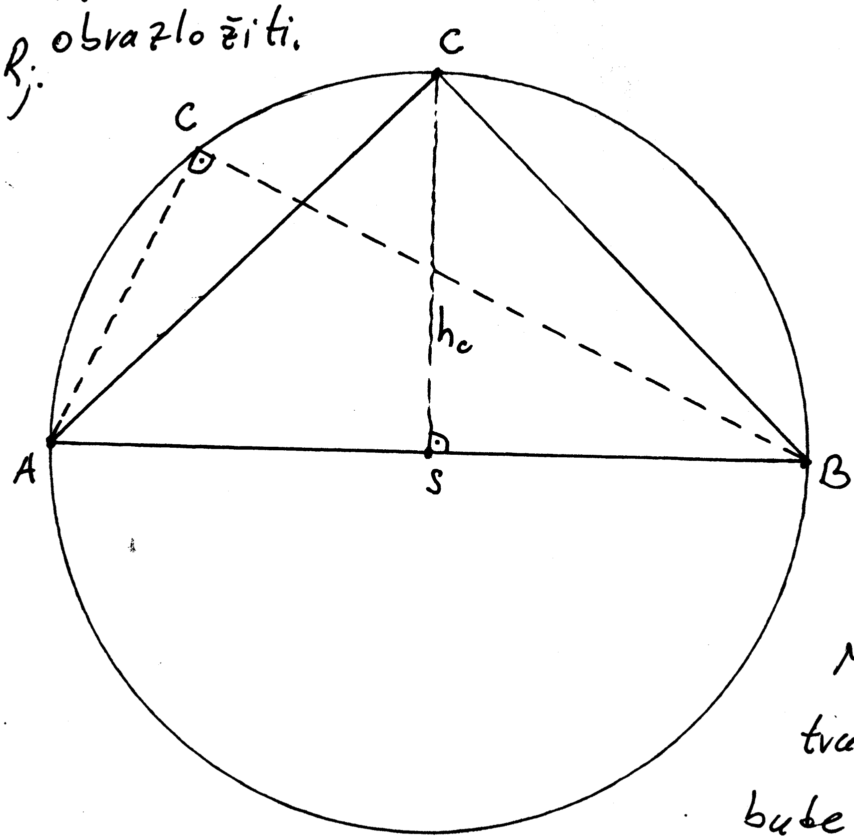
(sa pretpostavkom da je $\triangle ABC$ raznostraničan ili sa pretpostavkom da postoji $\triangle PQR$)

Pretpostavka suprotna tvrdnji nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome $\triangle PQR$ ne može biti jks

q.e.d.

(#) Dat je krug $k$ sa centrom u tački $S$ i prečnikom $AB$ ($A, B \in k$, $S \in AB$). Na krugu $k$ odrediti tačku $C$ tako da zbir duži $AC+BC$ bude najveći. Odgovor obrazložiti.

Rj:




Za svaku tačku $C$ na krugu $k$ dobićemo pravougli trougao $\Delta ABC$ (ugao nad prečnikom je pravi).

Površina pravouglog trougla je $P = \frac{a \cdot b}{2}$.

Možemo primjetiti da problem traženja da zbir duži $AC+BC$ bude najveći je ekvivalentan problemu traženja da proizvod duži $AC \cdot BC$ bude najveći,

$$P_{\Delta ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{AB \cdot h_c}{2}$$ ($h_c$ - visina spuštena iz vrha $C$).

Prema tome problem da proizvod duži $AC \cdot BC$ bude najveći je ekvivalentan problemu traženja tačke $C$ takve da visina $h_c$ bude najveća.

Najveća tetiva u krugu je prečnik kružnice pa naša visina treba da bude dio tog prečnika ili drugačije rečeno naša visina treba da bude poluprečnik $CS$ kruga takav da $CS \perp AB$. Sad nije teško primjetiti da iz podudarnosti SUS slijeda da su $\Delta ASC$ i $\Delta BSC$ podudarni $\Rightarrow AC \cong BC$.

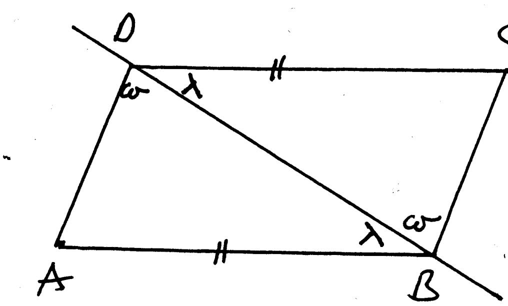
Prema tome, da bi zbir duži $AC+BC$ bio najveći tačku $C$ trebamo izabrati takvu da je $AC \cong BC$.

q.e.d.

(#) Definicija paralelograma: Paralelogram je četverougao ako i samo ako ima paralelne one stranice koje su suprotne jedna drugoj. Koristeći isključivo ovu definiciju, teoreme o podudarnosti trouglova i teoremu o podudarnosti uglova na transferzali dokazati sljedeću tvrdnju: Četverougao $\square ABCD$ je paralelogram akko ima jedan par suprotnih stranica koje su istovremeno paralelne i podudarne.

Rj. postavka zadatka

„$\Leftarrow$": $\left.\begin{array}{l}\square ABCD \text{ četverougao} \\ AB \parallel CD \wedge AB \cong CD\end{array}\right\} \Rightarrow \square ABCD$ je paralelogram



Prema postavci zadatka $AB \parallel CD$. Da bi dokazali da je $\square ABCD$ paralelogram trebamo još pokazati da je $AD \parallel BC$.

$AB \parallel CD \wedge p(B,D)$ transf. $\Rightarrow \sphericalangle ABD \cong \sphericalangle CDB = \lambda$

$\left.\begin{array}{l}AB \cong CD \\ \sphericalangle ABD \cong \sphericalangle CDB = \lambda \\ DB \cong DB\end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \triangle ABD \cong \triangle CDB$

$\Downarrow$

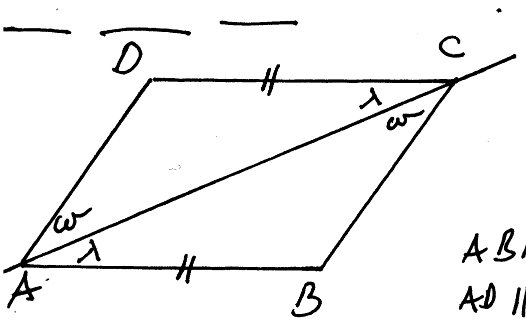
$\sphericalangle BDA \cong \sphericalangle DBC = \omega$ pa na $p(B,D)$ imamo dva ugla $\omega \Rightarrow AD \parallel BC$

$AD \parallel BC \wedge AB \parallel CD \Rightarrow \square ABCD$ je paralelogram

q.e.d.

postavka zadatka

„$\Rightarrow$": $\square ABCD$ je paralelogram $\Rightarrow AB \parallel CD \wedge AB \cong CD$



$\square ABCD$ paralelogram $\Rightarrow AB \parallel CD$, pa da bi završili zadatak ostaje nam samo još da pokažemo da $AB \cong CD$.

$AB \parallel DC \wedge p(A,C)$ transf. $\Rightarrow \sphericalangle CAB \cong \sphericalangle ACD = \lambda$

$AD \parallel BC \wedge p(A,C)$ transf. $\Rightarrow \sphericalangle ACB \cong \sphericalangle CAD = \omega$

$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle ACD = \lambda \\ AC \cong AC \\ \sphericalangle ACB \cong \sphericalangle CAD = \omega\end{array}\right\} \xRightarrow{USU} \triangle ABC \cong \triangle ADC$

$\Downarrow$

$AB \cong CD$

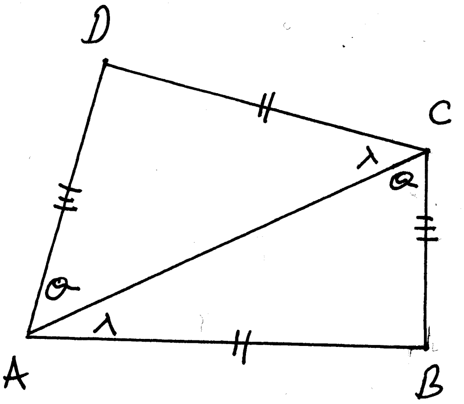
Prema tome $AB \parallel CD \wedge AB \cong CD$

q.e.d.

\# Definicija paralelograma: Paralelogram je četverougao koji ima paralelne suprotne stranice.. Koristeći isključivo ovu definiciju i teoreme o podudarnosti trouglova dokazati sljedeću tvrdnju: Četverougao $\square ABCD$ je paralelogram akko ima podudarne suprotne stranice.

Rj. postavka zadatka

„$\Leftarrow$": $\left.\begin{array}{l}\square ABCD \text{ četverougao}\\ AB \cong DC,\ AD \cong BC\end{array}\right\} \Rightarrow \square ABCD$ paralelogram



Posmatrajmo $\triangle ABC$ i $\triangle ADC$

$$\left.\begin{array}{l}AB \cong CD\\ BC \cong AD\\ AC \cong AC\end{array}\right\} \overset{SSS}{\Longrightarrow} \triangle ABC \cong \triangle ADC$$

$$\Downarrow$$

$$\measuredangle CAB \cong \measuredangle ACD = \lambda$$
$$\text{i } \measuredangle ACB \cong \measuredangle CAD = \theta$$

Na pravoj $p(A,C)$ imamo $\measuredangle ACD \cong \measuredangle CAB = \lambda \Rightarrow p(A,B) \parallel p(C,D)$

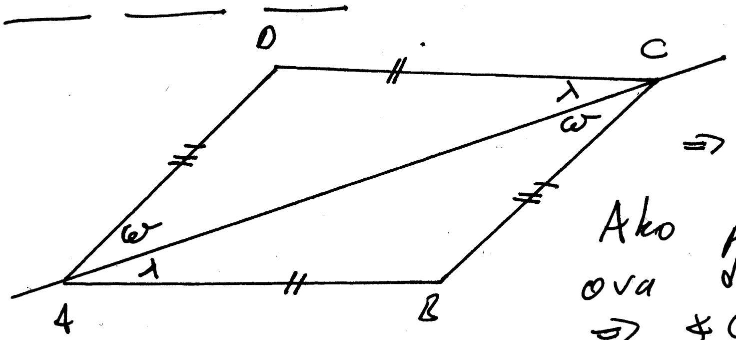
i $\measuredangle CAD \cong \measuredangle ACB = \theta \Rightarrow p(A,D) \parallel p(B,C)$

$\Rightarrow AB \parallel CD$ i $AD \parallel BC \Rightarrow \square ABCD$ paralelogram

q.e.d

postavka zadatka

„$\Rightarrow$" $\square ABCD$ paralelogram $\Rightarrow AB \cong DC$ i $AD \cong BC$.



$\square ABCD$ paralelogram $\Rightarrow AB \parallel CD$ i $BC \parallel AD$

$\Rightarrow p(A,B) \parallel p(C,D)$ i $p(B,C) \parallel p(A,D)$

Ako posmatramo $p(A,C)$ kao transferzalu ova dva para paralelnih pravih

$\Rightarrow \measuredangle CAB = \measuredangle ACD = \lambda$ i $\measuredangle ACB \cong \measuredangle CAD = \omega$

Posmatrajmo $\triangle ABC$ i $\triangle ACD$

$$\left.\begin{array}{l}\measuredangle BAC \cong \measuredangle ACD = \lambda\\ AC \cong AC\\ \measuredangle ACB \cong \measuredangle CAD = \omega\end{array}\right\} \overset{USU}{\Longrightarrow} \triangle ABC \cong ADC$$

$$\Downarrow$$

$$AB \cong DC \text{ i } AD \cong BC$$

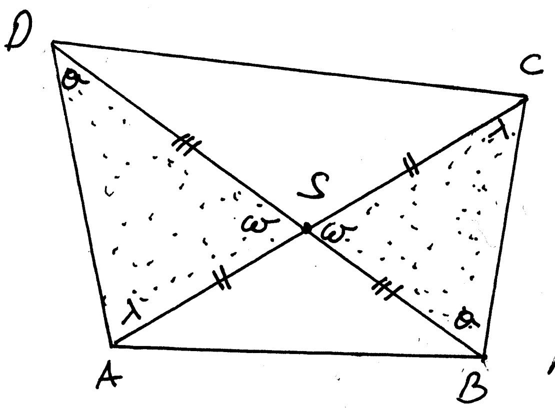
q.e.d.

# Definicija paralelograma: Paralelogram je četvorougao akko ima paralelne suprotne stranice (stranice koje su suprotne jedna drugoj). Koristeći isključivo ovu definiciju, teoreme o podudarnosti trouglova i teoremu o podudarnosti uglova na transferzali dokazati sledeću tvrdnju: Četvorougao $\square ABCD$ je paralelogram akko mu se dijagonale polove.

Rj: postavku zadatka

„$\Leftarrow$": $\left.\begin{array}{l} \square ABCD \text{ četvorougao} \\ AC \text{ i } BD \text{ su dijagonale} \\ AC \cap BD = \{S\} \\ S \text{ sredina } AC \\ S \text{ sredina } BD \end{array}\right\} \Rightarrow \square ABCD$ paralelogram

---




Uvedimo oznake kao na slici.

$\left.\begin{array}{l} DS \cong BS \\ \angle ASD \cong \angle BSC = \omega \\ AS \cong CS \end{array}\right\} \overset{SUS}{\Longrightarrow} \triangle ASD \cong \triangle BSC$

$\Downarrow$

$\angle SAD \cong \angle SCB = \lambda$ i

$\angle SDA \cong \angle SBC = \theta$

Na pravoj $p(A,C)$ imamo $\angle DAC \cong \angle BCA = \lambda$

$\Rightarrow p(A,D) \parallel p(B,C)$ ...(*)

Na pravoj $p(B,D)$ imamo $\angle ADB \cong \angle DBC = \theta \Rightarrow p(A,D) \parallel p(B,C)$ ...(**)

(*) i (**) $\Rightarrow AB \parallel CD$ i $AD \parallel BC \Rightarrow \square ABCD$ je paralelogram

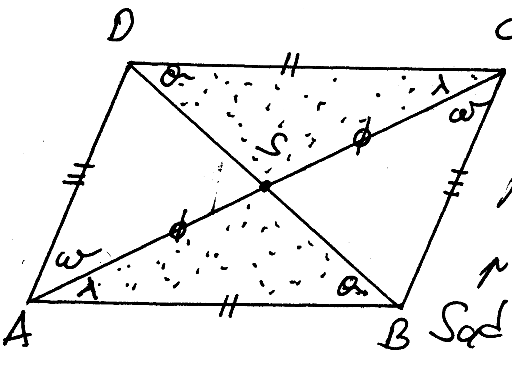
q.e.d.

---

postavku zadatka

„$\Rightarrow$" $\left.\begin{array}{l} \square ABCD \text{ paralelogram} \\ AC, BD \text{ dijagonale} \\ AC \cap BD = \{S\} \end{array}\right\} \Rightarrow S$ je sredina $AC$ i $S$ je sredina $BD$.

---




$\square ABCD$ paralelogram $\Rightarrow AB \parallel CD$ i $AD \parallel BC \Rightarrow$

$p(A,B) \parallel p(C,D)$ i $p(A,C)$ transf. $\Rightarrow \angle BAC \cong \angle ACD = \lambda$

$p(A,D) \parallel p(B,C)$ i $p(A,C)$ transf. $\Rightarrow \angle DAC \cong \angle BCA = \omega$

Na osnovu podudarnost USU $\Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle ADC$

$\Downarrow$

$AB \cong DC$ i $AD \cong BC$

$p(A,B) \parallel p(D,C)$ i $p(B,D)$ transf.

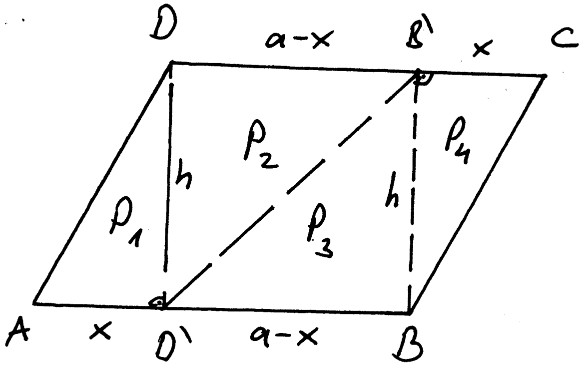
$\Rightarrow \angle ABD \cong \angle BDC = \theta$

Sad ako posmatramo $\triangle ABS$ i $\triangle CDS$ na osnovu pravila USU

$\Rightarrow \triangle ABS \cong \triangle CDS \Rightarrow AS \cong CS$ i $BS \cong DS$, q.e.d.

(#) Koristeći isključivo formulu za površinu pravouglog trougla ($P=\frac{a\cdot b}{2}$, gdje su a i b katete) izvesti formulu za površinu paralelograma ($P=a\cdot h$, gdje je npr. $AB=a$ a h udaljenost između stranica AB i CD).

Rj.:




Označimo stranicu AB sa a. Na osnovu osobina paralelograma znamo da je $AB \cong CD = a$. Neka je $D`$ ortogonalna projekcija tačke D na AB.

Ako je $AD` = x$ tada je $BD` = a-x$. Ostale oznake uvedimo kao na slici.

$$P_{\square ABCD} = P_1+P_2+P_3+P_4 = \frac{x\cdot h}{2}+\frac{(a-x)\cdot h}{2}+\frac{(a-x)\cdot h}{2}+\frac{h\cdot x}{2}$$

$$= x\cdot h+(a-x)\cdot h = (x+a-x)\,h = a\cdot h$$

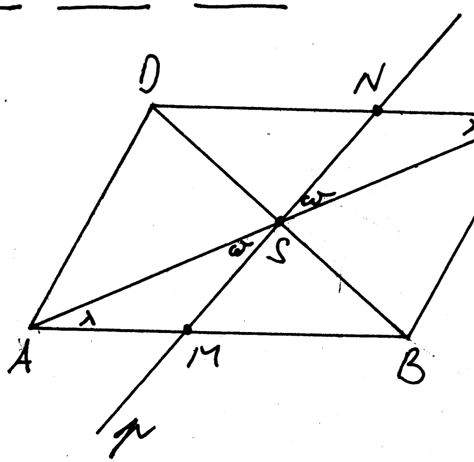
$P_{\square ABCD} = a\cdot h$ što je i trebalo dobiti

(#) Svaka prava koja sadrži presjek dijagonala paralelograma i siječe jednu stranicu, siječe i suprotnu stranicu. Njen odsječak je raspolovljen presječnom tačkom dijagonala. Dokazati.

Rj: postavka zadatka:

$$\left.\begin{array}{l} \square ABCD \text{ paralelogram} \\ AC \cap AB = \{S\},\ \text{prava } p \ni S \\ p \cap AB = \{M\},\ p \cap CD = \{N\} \end{array}\right\} \Rightarrow S \text{ sredina } MN$$

---




$\square ABCD$ paralelogram $\Rightarrow$ dijagonale se polove $\Rightarrow$
$\Rightarrow AS \cong SC$

$p(A,B) \parallel p(C,D)$ ; $p(A,C)$ transferzala

$\Rightarrow \quad \measuredangle MAS \cong \measuredangle SCN = \lambda$

Imamo:

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle MAS \cong \measuredangle SCN = \lambda \\ AS \cong CS \\ \measuredangle ASM \cong \measuredangle CSN = \omega \end{array}\right\} \overset{USU}{\Longrightarrow} \Delta ASM \cong \Delta CSN$$

$$\Downarrow$$

$$MS \cong NS$$

$$\Downarrow$$

$$S \text{ sredina } MN$$

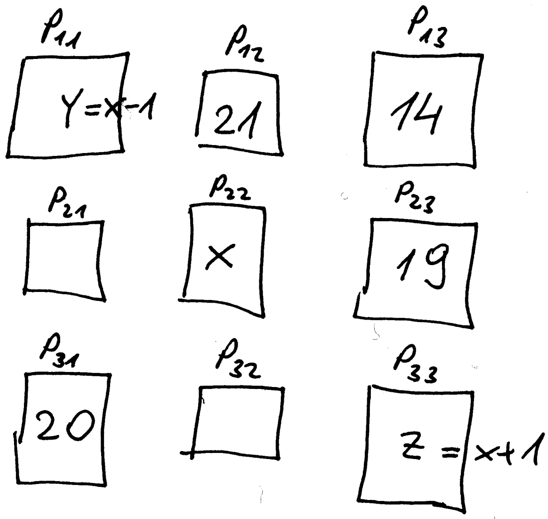
q.e.d.

# Posmatrajmo površine devet različitih kvadrata $P_{11}, P_{12}, P_{13}, P_{21}, P_{22}, P_{23}, P_{31}, P_{32}$ i $P_{33}$. Za ove površine znamo da vrijedi

$$P_{11}+P_{12}+P_{13}=P_{21}+P_{22}+P_{23}=P_{31}+P_{32}+P_{33}=P_{11}+P_{21}+P_{31}=P_{12}+P_{22}+P_{32}=$$
$$=P_{13}+P_{23}+P_{33}=P_{11}+P_{22}+P_{33}=P_{13}+P_{22}+P_{31}.$$

Ako su $P_{12}=21$, $P_{13}=14$, $P_{23}=19$ i $P_{31}=20$ diskutovati da li se mogu odrediti površine $P_{11}$, $P_{22}$ i $P_{33}$.

R:




Površinu $P_{22}$ označimo sa $x$, $P_{11}$ sa $Y$. Kako je

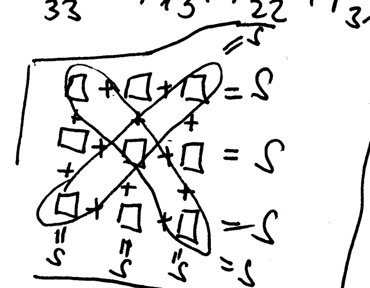
$$P_{11}+P_{12}+P_{13}=P_{13}+P_{22}+P_{31}$$

to $Y+21+\cancel{14}=\cancel{14}+x+20$

$$Y=x-1.$$

Kako je

$$P_{13}+P_{23}+P_{33}=P_{13}+P_{22}+P_{31}$$




to $14+x+20=14+19+z$

$$z=x+1$$

Sad kako je $P_{11}+P_{22}+P_{33}=P_{13}+P_{22}+P_{31}$ to

$$x-1+x+x+1=20+x+14$$

$$3x-x=34$$

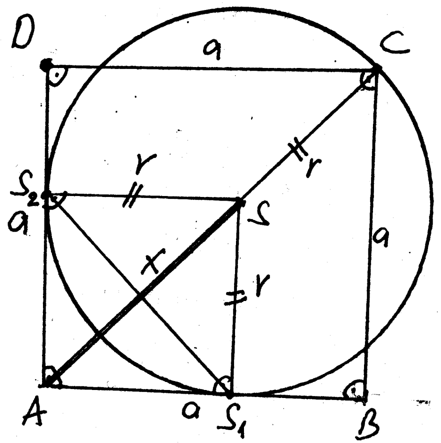
$$x=17$$

$$P_{11}=16,\quad P_{22}=17,\quad P_{33}=18.$$

Tražene površine se mogu odrediti kao i $P_{21}$ i $P_{32}$ (15 i 13).

(#) Zadan je kvadrat □ABCD dužine stranice 1 dm. Naći poluprečnik kružnice koja dodiruje njegove dvije stranice i prolazi kroz njegov jedan vrh.

Rj.




Označimo sa $r$ poluprečnik, a sa $S$ centar kružnice koja dodiruje stranice $AB$ u $S_1$ a stranicu $AD$ u $S_2$.

Primetimo da je četverougao $\square AS_1SS_2$ kvadrat (imamo sve četri ugla po $90°$ i $SS_1 \cong SS_2 = r$).

Označimo sa $x$ stranicu $AS$.

U $\triangle ABC$ imamo $(x+r)^2 = a^2+a^2$ tj.

$(x+r)^2 = 2 \Rightarrow x+r=\sqrt{2}$ ... (1)

U $\triangle AS_1S$ imamo $x^2 = r^2+r^2 \Rightarrow x^2 = 2r^2 \Rightarrow x = r\sqrt{2}$

(1) $\Rightarrow$ $r\sqrt{2}+r=\sqrt{2}$

$$r(\sqrt{2}+1)=\sqrt{2} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\cdot\frac{(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-1)} = \frac{2-\sqrt{2}}{2-1}$$

tj. $r = 2-\sqrt{2}$ q.e.d.

#

$\triangle ABC$

(#) Pravougaonik je podijeljen na 9 manjih pravougaonika. Površine pet od njih su 5, 3, 9, 2 i 2 $cm^2$ (vidi sliku). Odrediti površinu pravougaonika.

| | | |
|---|---|---|
| 5 | 3 | 2 |
| | 9 | |
| | | 2 |

Rj: Označimo stranice manjih pravougaonika sa a, b, c, d, e i f kao na slici

| | a | b | c |
|---|---|---|---|
| d | 5 | 3 | 2 |
| e | 15 | 9 | 6 |
| f | 5 | 3 | 2 |

Površine tri pravougaonika su dovoljna da odrede površinu četvrtog.

$$\left.\begin{aligned} a\cdot d &= 5 \\ b\cdot d &= 3 \Rightarrow d=\tfrac{3}{b} \\ e\cdot b &= 9 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} a\cdot d&=5 \\ a\cdot\tfrac{3}{b}&=5 \\ 3a&=5b \\ a&=\tfrac{5}{3}b \end{aligned}$$

$$e\cdot a = e\cdot\frac{5}{3}b = \frac{5}{3}eb = 5\cdot 3 = 15$$

$$\left.\begin{aligned} b\cdot d &= 3 \Rightarrow d=\tfrac{3}{b} \\ b\cdot e &= 9 \\ c\cdot d &= 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} c\cdot d&=2 \\ c\cdot\tfrac{3}{b}&=2 \\ 3c&=2b \\ c&=\tfrac{2}{3}b \end{aligned}$$

$$e\cdot c = e\cdot\frac{2}{3}b = \frac{2}{3}eb = \frac{2}{3}\cdot 9 = 6$$

$$\left.\begin{aligned} e\cdot b &= 9 \Rightarrow e=\tfrac{9}{b} \\ e\cdot c &= 6 \\ f\cdot c &= 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} e\cdot c&=6 \\ \tfrac{9}{b}\cdot c&=6 \\ 9c&=6b \quad /:3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2b&=3c \\ b&=\tfrac{3}{2}c \end{aligned}$$

$$f\cdot b = f\cdot\frac{3}{2}c = \frac{3}{2}\cdot 2 = 3$$

$$\left.\begin{aligned} a\cdot e &= 15 \Rightarrow e=\tfrac{15}{a} \\ e\cdot b &= 9 \\ f\cdot b &= 3 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} e\cdot b&=9 \\ \tfrac{15}{a}\cdot b&=9 \\ 15b&=9a \quad /:3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3a&=5b \\ a&=\tfrac{5}{3}b \end{aligned}$$

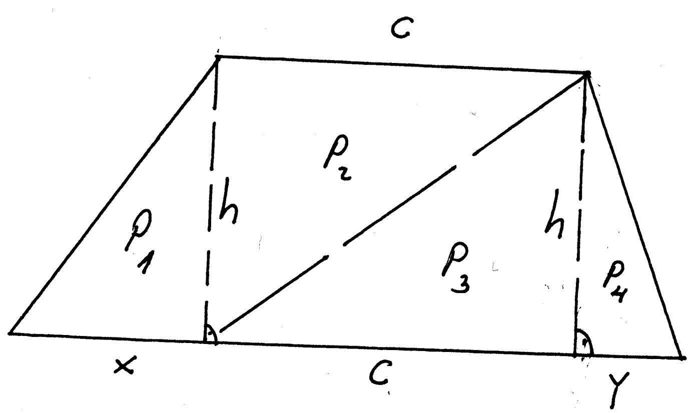
$$f\cdot a = f\cdot\frac{5}{3}b = \frac{5}{3}\cdot 3 = 5$$

$$10 + 30 + 10$$

Površina pravougaonika je 50 $cm^2$.

(#) Definicija trapeza: Trapez je četverougao koji ima tačno jedan par paralelnih stranica. Obrazložiti odgovor na pitanje: Da li je paralelogram trapez? Koristeći isključivo formulu za površinu pravouglog trougla ($P=\frac{a\cdot b}{2}$) izvesti formulu za površinu trapeza ($P=\frac{1}{2}(a+c)h$ gdje su a i c dužine dvije paralelne stranice, a h udaljenost između njih).

Rj. Odgovor na pitanje: Da li je paralelogram trapez? ostavljamo za vježbu. (uputa: nije).




Uvedimo oznake kao na slici ($a=x+c+Y$).

$$P_{trapeza}=P_1+P_2+P_3+P_4$$

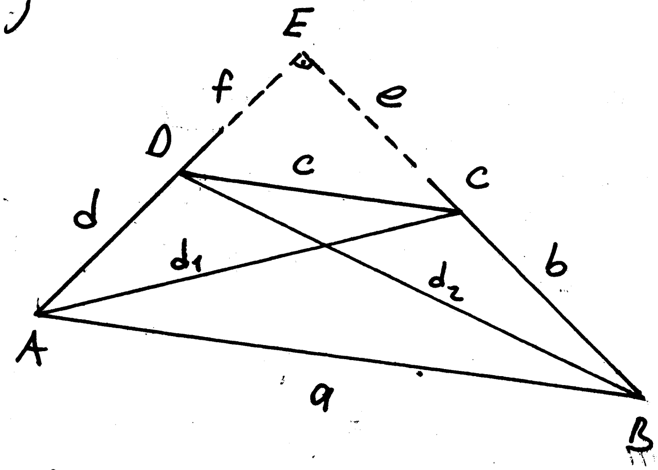
$$=\frac{x\cdot h}{2}+\frac{h\cdot c}{2}+\frac{c\cdot h}{2}+\frac{h\cdot Y}{2}$$

$$=\frac{(x+c+Y)h+c\cdot h}{2}=\frac{ah+ch}{2}$$

Prema tome $P=\frac{1}{2}(a+c)h$.

#) Ako su kraci trapeza međusobno normalni, dokazati da je zbir kvadrata osnovica jednak zbiru kvadrata dijagonala.

Rj.




Uvedimo oznake kao na slici.

$\Delta ACE$ je pravougli sa hipotenuzom AC

$$d_1^2=(d+f)^2+e^2 \quad \dots (1)$$

$\Delta BDE$ je pravougli sa hipotenuzom BD

$$d_2^2=(b+e)^2+f^2 \quad \dots (2)$$

$\Delta ABE$ je pravougli sa hipotenuzom AB $\Rightarrow$ $a^2=(d+f)^2+(e+b)^2$

$\Delta DCE$ je pravougli sa hipotenuzom CD $\Rightarrow$ $c^2=e^2+f^2$

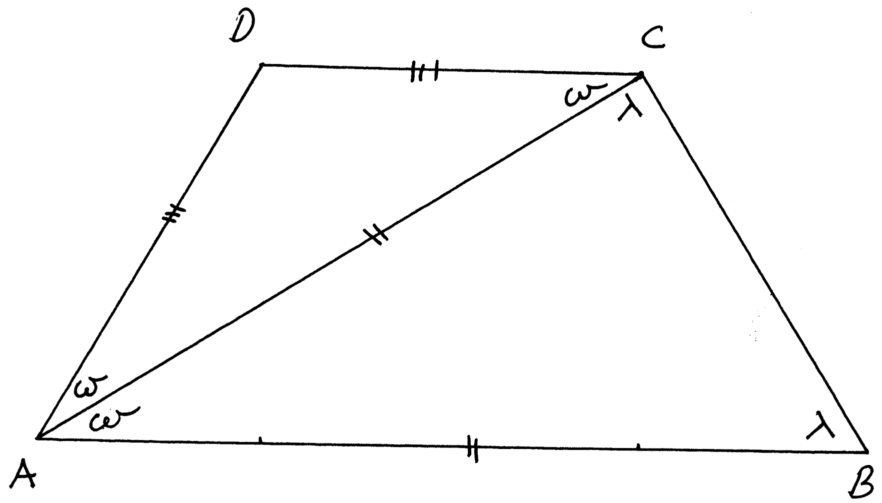
$(1)+(2) \Rightarrow \quad d_1^2+d_2^2=(d+f)^2+e^2+(b+e)^2+f^2=a^2+c^2$

t.j. $\quad d_1^2+d_2^2=a^2+c^2$

q.e.d.

(#) Dijagonala razbija jednakokraki trapez na dva jednakokraka trougla. Odrediti uglove tog trapeza.

R:




jkk trapez $\square ABCD$ ima podudarne stranice $AD$ i $BC$, kao i uglove $\measuredangle DAB \cong \measuredangle ABC$ i $\measuredangle ADC \cong \measuredangle BCD$.

$AB$ je najveća stranica

Kako dijagonala razbija trapez na dva jkk trougla to $\triangle ABC$ jkk sa $AB \cong AC$ i $\triangle ADC$ jkk sa $AD \cong DC$

$\Rightarrow \measuredangle ACB \cong \measuredangle ABC = \lambda$ i $\measuredangle DAC \cong \measuredangle DCA \cong \omega$

$p(A,B) \parallel p(C,D)$ i $p(A,C)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle CAB = \omega$

Sad imamo

$$2\omega = \lambda$$
$$2\lambda + \omega = 180^\circ \quad / \cdot 2$$

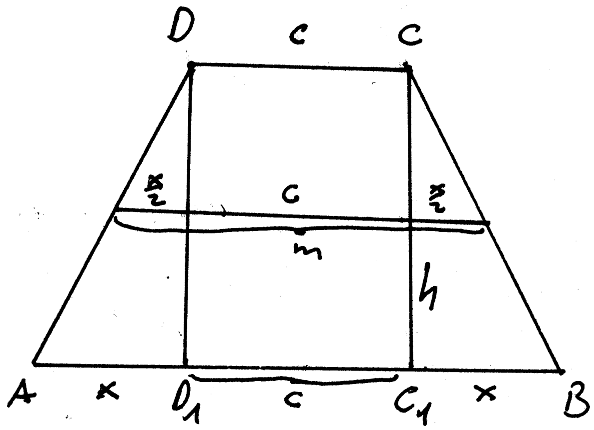
$$4\lambda + 2\omega = 360^\circ$$
$$5\lambda = 360^\circ$$
$$\lambda = 72^\circ \Rightarrow \omega = 36^\circ$$

$\Rightarrow \measuredangle A = 72^\circ, \ \measuredangle B = 72^\circ, \ \measuredangle C = 108^\circ, \ \measuredangle D = 108^\circ$

(#) U jednakokrakom trapezu srednja linija ima dužinu 5 cm, a dijagonala je dva puta duža od srednje linije. Kolika je površina tog trapeza?

Rj. Koristim oznake sa slike. I način:

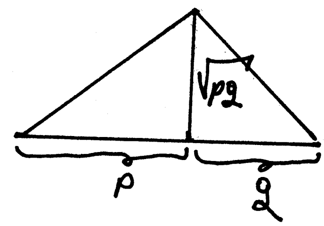
$$P = \frac{a+c}{2} \cdot h = m \cdot h$$




$m = 5$ cm

$AC = 10$ cm

Iskoristiću poznatu činjenicu da je




$$\Rightarrow \quad h = \sqrt{(x+c)\cdot x}$$

$m = 5 \Rightarrow x + c = 5 \Rightarrow h = \sqrt{5x}$ $\qquad AC^2 = 10^2 = 100$

$AC^2 = AC_1^2 + CC_1^2 = (x+c)^2 + h^2 = 25 + 5x \Rightarrow$ $\quad 5x = 75$, $\; x = 15$

$h = \sqrt{75} = \sqrt{3 \cdot 25} = 5\sqrt{3}$ $\qquad P = 25\sqrt{3}\ cm^2$

II način:

$m = \frac{a+c}{2} = 5$ cm $\qquad AC_1 = a - x = a - \frac{a-c}{2} = \frac{a+c}{2} = 5$

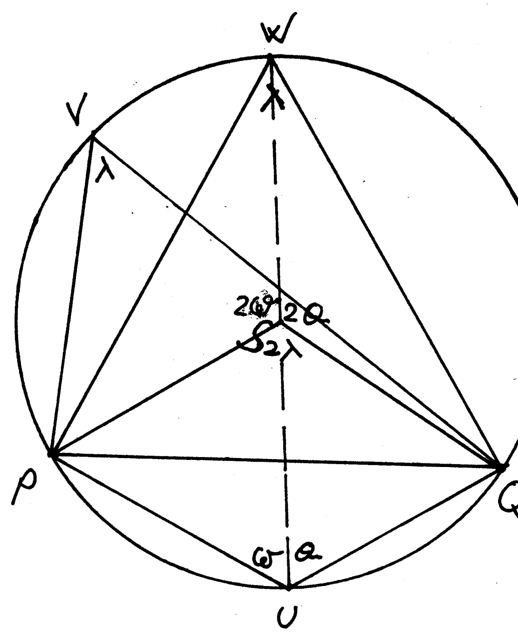
$a + c = 10$ cm $\qquad h^2 = AC^2 - h^2 = 100 - 25 = 75$

$x = \frac{a-c}{2}$ $\qquad h = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$

$$P = 5 \cdot 5\sqrt{3} = 25\sqrt{3}\ cm^2$$

(#) Dokazati da je suma oštrog i tupog periferiskog ugla nad istom tetivom $180^\circ$.

Rj.




PQ tetiva

$\measuredangle PUQ$ tupi periferiski ugao nad tetivom PQ

$\measuredangle PVQ$ oštri periferiski ugao nad tetivom PQ

Dokažimo da je $\measuredangle PVQ + \measuredangle PUQ = 180^\circ$.

Neka je $\measuredangle PSQ$ centralni ugao nad tetivom PQ.

Tada je $\measuredangle PVQ = \frac{1}{2}\measuredangle PSQ$. ...(*)

Označimo sa W tačku na kružnici tako da je UW prečnik kružnice.

Tada je $\measuredangle PWQ$ oštri periferiski ugao nad tetivom PQ pa je $\measuredangle PWQ = \frac{1}{2}\measuredangle PSQ \overset{(*)}{\Rightarrow} \measuredangle PVQ \overset{=}{=} \measuredangle PWQ = \lambda$.

Ako uvedemo oznake $\measuredangle PUW = \omega$ i $\measuredangle QUW = \theta$ (ovo su oštri periferiski uglovi nad tetivama PW i QW) tada na osnovu prvog zadatka imamo

$$\measuredangle PSW = 2\omega \quad i \quad \measuredangle QSW = 2\theta.$$

Sad imamo $2\lambda + 2\omega + 2\theta = 360^\circ \quad /:2$

$$\lambda + \omega + \theta = 180^\circ$$

tj. $\measuredangle PVQ + \measuredangle PUQ = 180^\circ$

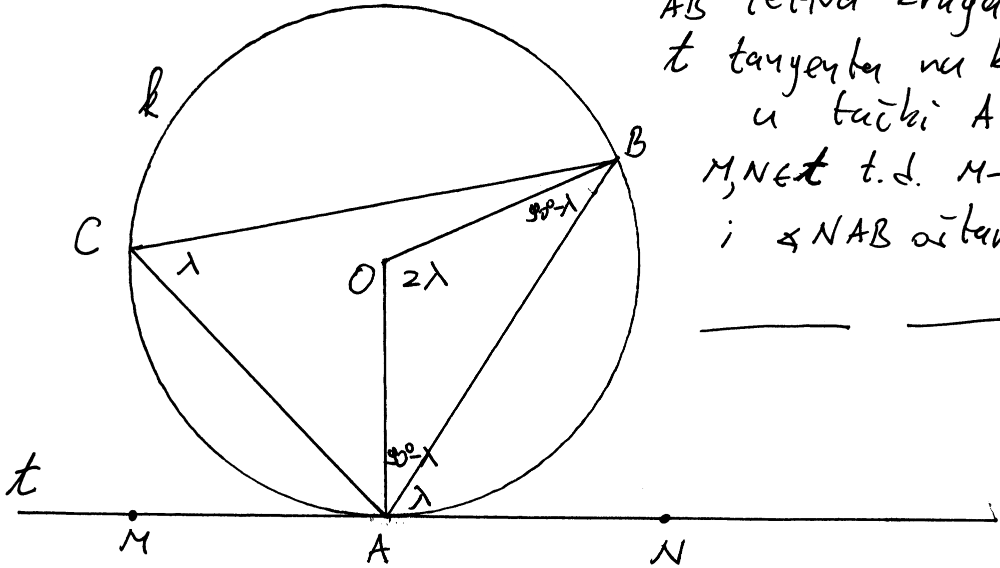
q.e.d.

(#) Dokazati da je ugao između tangente i tetive jednak periferiskom uglu nad tom tetivom.

Rj.

$k(O,r)$ dati krug
$AB$ tetiva kruga
$t$ tangenta na krug u tački $A$
$M,N \in t$ t.d. $M-A-N$
i $\measuredangle NAB$ oštar

$\Rightarrow \measuredangle NAB \cong \measuredangle ACB$



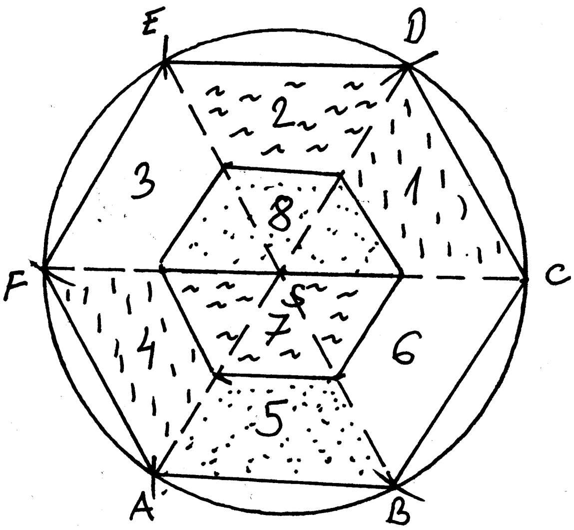

$\measuredangle ACB = \lambda \Rightarrow \measuredangle AOB = 2\lambda \Rightarrow \measuredangle OAB \cong \measuredangle OBA = 90° - \lambda$

Kako je $OA \perp t \Rightarrow \measuredangle BAN = \lambda \Rightarrow \measuredangle ACB \cong \measuredangle BAN = \lambda$

q.e.d.

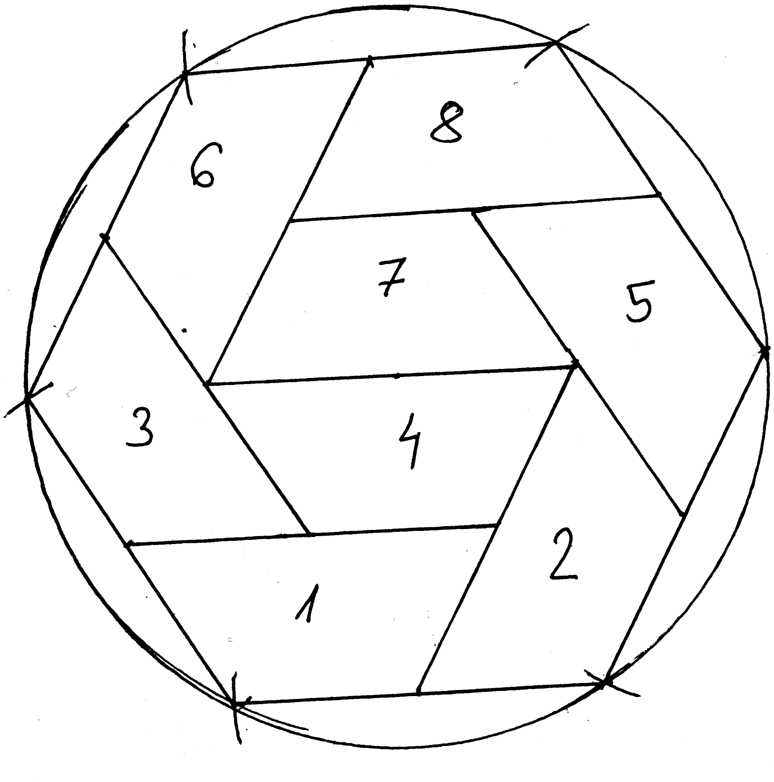
#) U dati pravilan šestougao upisati 8 podudarnih četverouglova. (Prisjetimo se osobina pravilnog šestougla: pravilan šestougao ΔABCDEF ima šest podudarnih stranica, šest podudarnih uglova, tri para paralelnih suprotnih stranica ($AB \parallel ED$, $BC \parallel EF$, $CD \parallel AF$) i dijagonale $AD$, $BE$ i $CF$ se polove.) Obrazložiti ideju koja vas je dovela do rješenja.

Rj.




Označimo sa $S$ presjek dijagonala. Posmatrajmo srednje linije iks trouglova $\Delta ABS$, $\Delta BCS$, $\Delta CDS$, $\Delta EDS$, $\Delta EFS$. Srednje linije ovih trouglova su podudarne među sobom. Ovo nas lagano vodi do rješenja zadatka. (vidi sliku lijevo)

Iskoristivši neke druge osobine možemo riješiti zadatak i na drugi način:



# Polazeći isključivo od formule za površinu pravouglog trougla ($P=\frac{ab}{2}$) izvesti formulu za površinu pravilnog šestougla ($P=\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$).

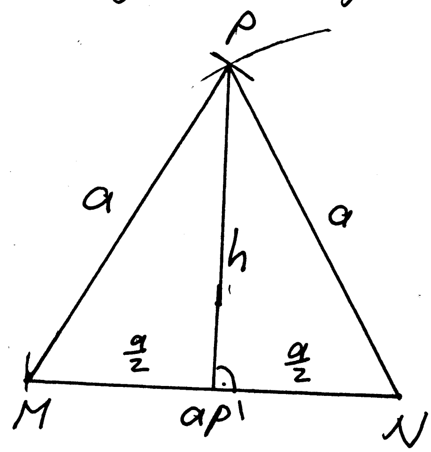
Rj:

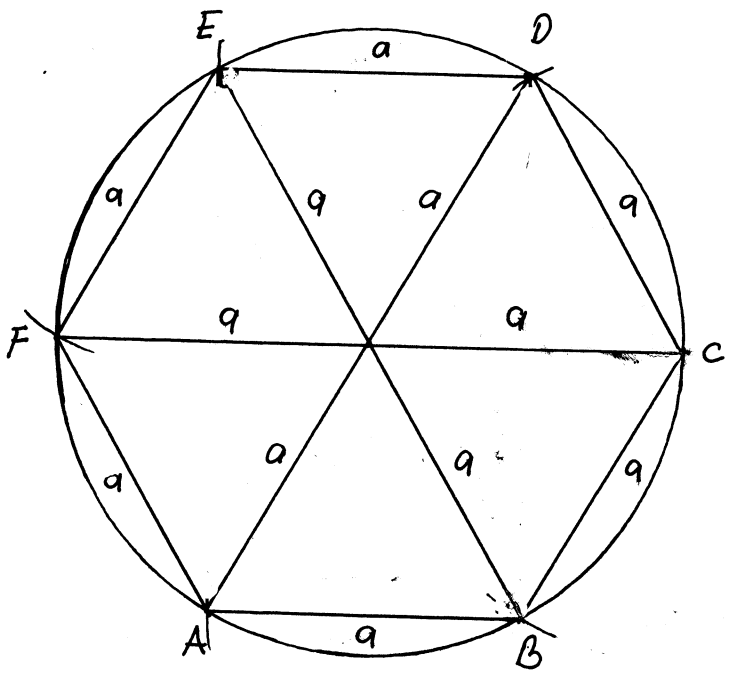
Pravilan šestougao se sastoji od 6 jks trouglova! (ovo nije teško dokazati)

Posmatrajmo jks $\triangle MNP$.

$$P_{\triangle MNP} = P_{\triangle PP'M} + P_{\triangle PP'N} = \frac{\frac{a}{2}\cdot h}{2} + \frac{\frac{a}{2}\cdot h}{2}$$

pravougli $\triangle$ pravougli $\triangle$




$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

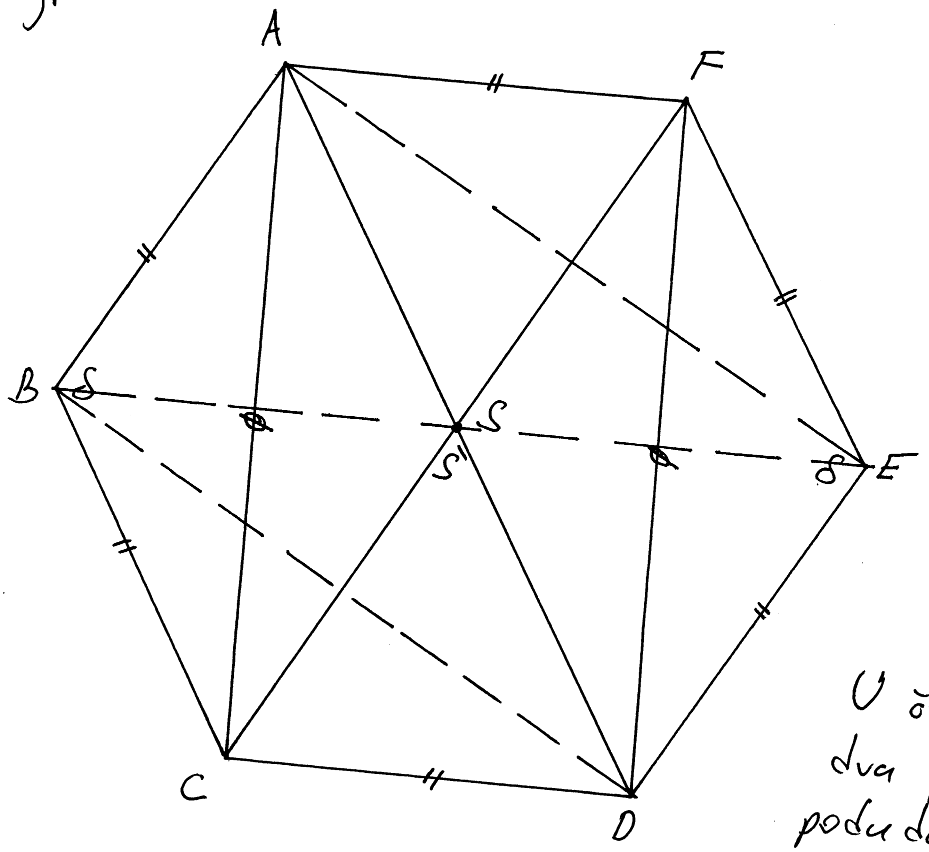
$$P_{\triangle MNP} = \frac{a}{2}\cdot h = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$P_{\text{pravilnog šestougla}} = 6\cdot P_{\triangle MNP} = 6\,\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$P_{\text{pravilnog šestougla}} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

# Pravilan šestougao je šestougao kod koga su podudarne sve stranice i podudarni svi uglovi. Dat je pravilan šestougao $ABCDEF$. Dokazati da se dijagonale $AD$, $CF$ i $BE$ sijeku u istoj tački $S$.

Rj.




Presjek dijagonala $AD$ i $CF$ označimo sa $S$.
Posmatrajmo $\triangle ABC$ i $\triangle FDE$.
Imamo:

$$\left.\begin{array}{r} AB \cong EF \\ \measuredangle ABC \cong \measuredangle FED = \delta \\ BC \cong ED \end{array}\right\} \overset{SUS}{\Longrightarrow}$$

$$\triangle ABC \cong \triangle FED$$
$$\Downarrow$$
$$AC \cong FD$$

U četverouglu $\square ABCD$ imamo dva para naspremnih podudarnih stranica $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\square ACDF$ je paralelogram $\Rightarrow$ dijagonale $CF$ i $AD$ se polove tj. $S$ je sredina dijagonale $CF$ i $S$ je sredina dijagonale $AD$.

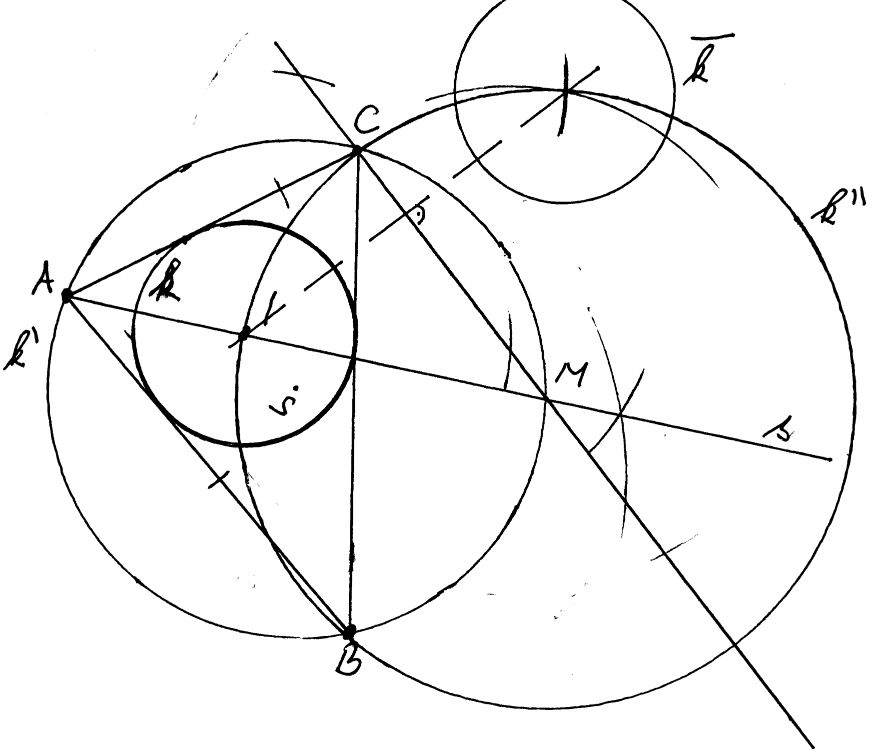
Dalje neka je $\{S'\} = BE \cap AD$. Na isti način kao maloprije se pokaže da je $\square BDEA$ paralelogram $\Rightarrow$ dijagonale se polove $\Rightarrow$ $S'$ sredina $BE$ i $S'$ sredina $AD$.

$$\left.\begin{array}{l} S' \text{ sredina } AD \\ S \text{ sredina } AD \end{array}\right\} \Rightarrow S \equiv S' \Rightarrow \text{dijagonale } AD, CF \text{ i } BE \text{ se sijeku u tački } S$$

q.e.d.

\# U $\triangle ABC$ je upisan krug $k$ sa centrom u $I$. Centar opisanog kruga $k''$ oko $\triangle BCI$ nalazi se na presjeku $pp[A,I)$ i kruga $k'$ koji je opisana oko $\triangle ABC$. Spomenute krugove i trouglove nacrtati na proizvoljan način. Nakon toga krug $k$ preslikati osnom simetrijom s osom u pravoj $p(C,M)$ gdje je $M$ centar kruga $k''$.

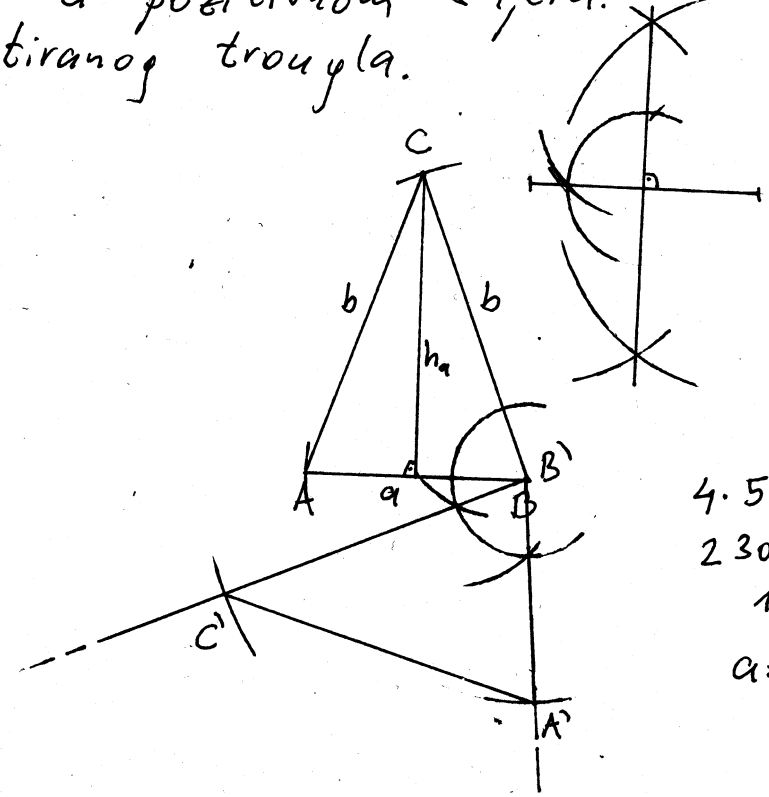
Rj. Prvo ćemo nacrtati $k'(S, r')$, pa ćemo nacrtati $\triangle ABC$, pa simetralu $s$ ugla $\measuredangle BAC$, krug $k''(M, r'')$ i na kraju $k(I, r)$




$$G_{p(M,C)}(k) = \bar{k}$$

#) Jednakokraki trougao $\Delta ABC$ čiji je obim $O=64\,cm$, a visina na osnovici $h_a=24\,cm$ rotirati oko vrha $B$ za ugao od $90^\circ$ u pozitivnom smjeru. Izračunati površinu novonastalog rotiranog trougla.

Rj.




Rotacija čuva dužine pa su novonastali trougao $\Delta A'B'C'$ i $\Delta ABC$ podudarni.

$O = 2b + a = 64 \Rightarrow 2b = 64 - a$

$h_a^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \qquad 4b^2 = (64-a)^2$

$24^2 = b^2 - \frac{a^2}{4} \quad /\cdot 4 \qquad = 4096 - 128a + a^2$

$4 \cdot 576 = 4b^2 - a^2$

$2304 = 4096 - 128a$

$128a = 1792$

$a = 14\,cm$

$P = \frac{a \cdot h_a}{2}$

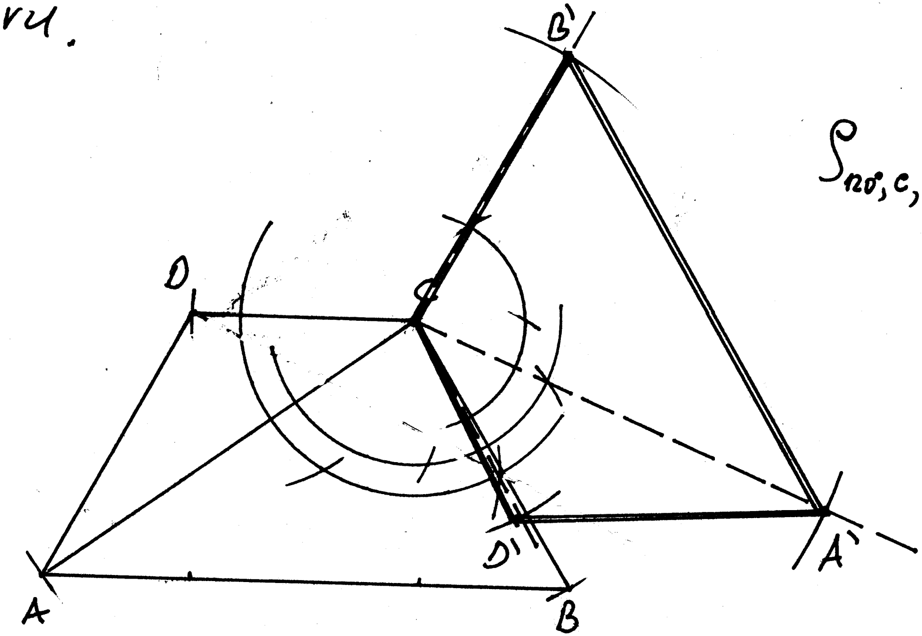
$P = \frac{14 \cdot 24}{2} = 7 \cdot 24$

$P = 168\,cm^2$

(#) Jednakokraki trapez $\square ABCD$ sa osnovicom $AB = 7$ cm rotirati oko tačke $C$ za ugao od $120°$ u pozitivnom smjeru.

Rj.

$$\rho_{120°, C, +}(\square ABCD) = \square A'B'CD'$$

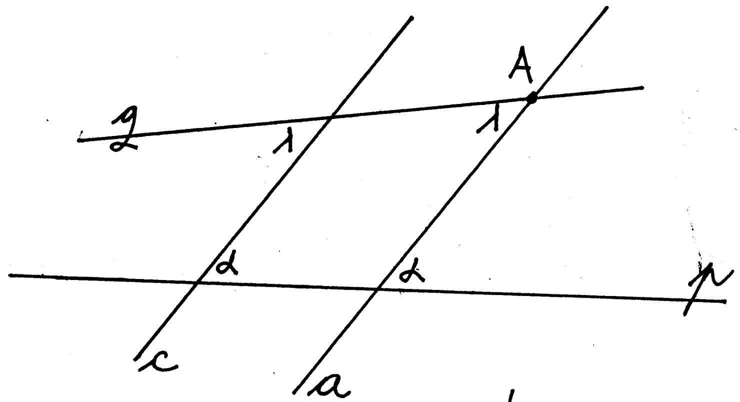


# Konstruisati pravu koja prolazi kroz datu tačku (van date prave) i siječe datu pravu pod datim uglom.

Rj.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je $a$ tražena prava koja sadrži tačku $A \in p$, i siječe pravu $p$ pod uglom $\alpha$.

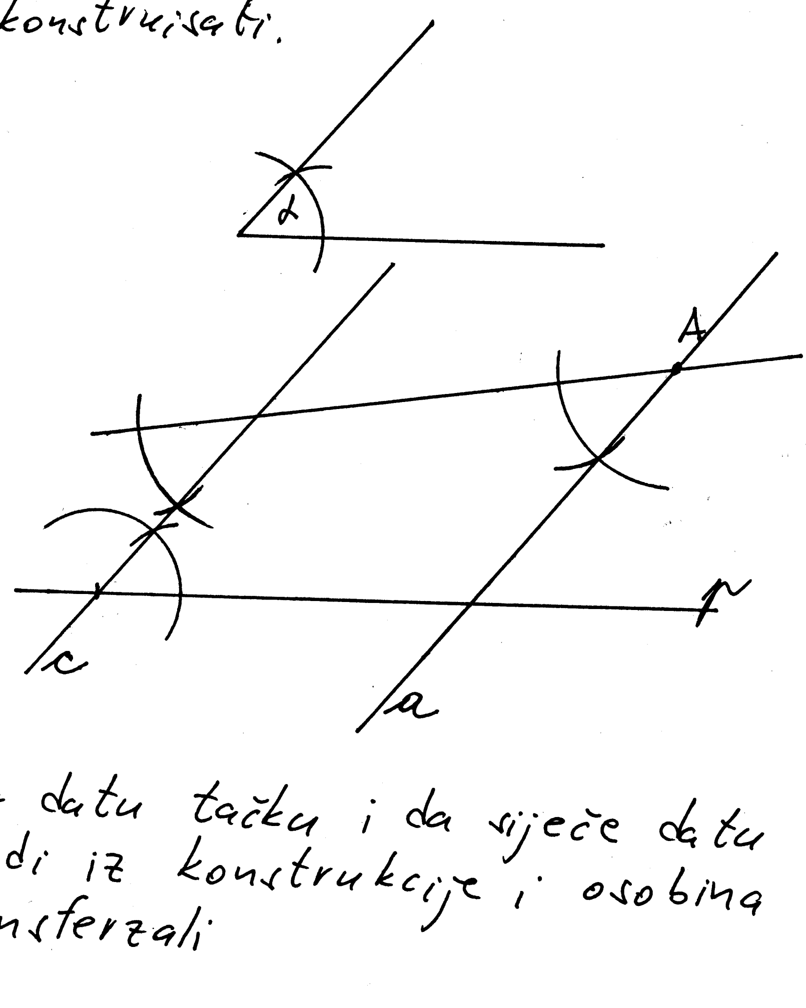



Neka je $c$ proizvoljna prava koja siječe pravu $p$ pod uglom $\alpha$. Primjetimo da je $a \parallel c$.

Ako sa $g$ označimo proizvoljnu pravu koja siječe prave $a$ i $c$ i koja sadrži tačku $A$, dobićemo jednake uglove $\lambda$ na transferzali, pa pravu $a$ sad nije teško konstruisati.

Konstrukcija

1. $p$, $A \notin p$, $\alpha$
2. proizvoljnu pravu $c$ takvu da siječe pravu $p$ pod uglom $\alpha$
3. proizvoljnu pravu $g$ takvu da siječe prav da sadrži tačku $A$.
4. pravu $a$: $A \in a$ i $a \parallel c$




Dokaz

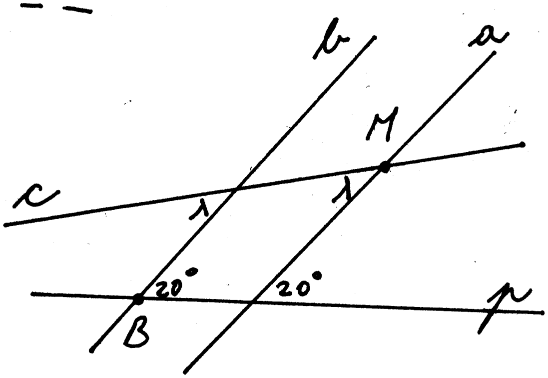
Da dobijena prava prolazi kroz datu tačku i da siječe datu pravu pod datim uglom slijedi iz konstrukcije i osobina podudarnosti uglova na transferzali

Diskusija

Jedinstvenost rješenja slijedi iz 5 Euklidovog aksioma.

(#) Kroz datu tačku M van date prave p konstruisati pravu koja siječe datu pravu pod uglom od 20°. (Ugao od 20° konstruisati približno tačno).

Analiza




Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je a tražena prava koja sadrži tačku M i siječe pravu p pod uglom od 20°. Neka je B proizvoljna tačka na pravoj p. Kroz tačku B nije teško konstruisati pravu b koja siječe pravu p pod uglom od 20°. Neka je c proizvoljna prava koja sadrži tačku M i siječe pravu b.

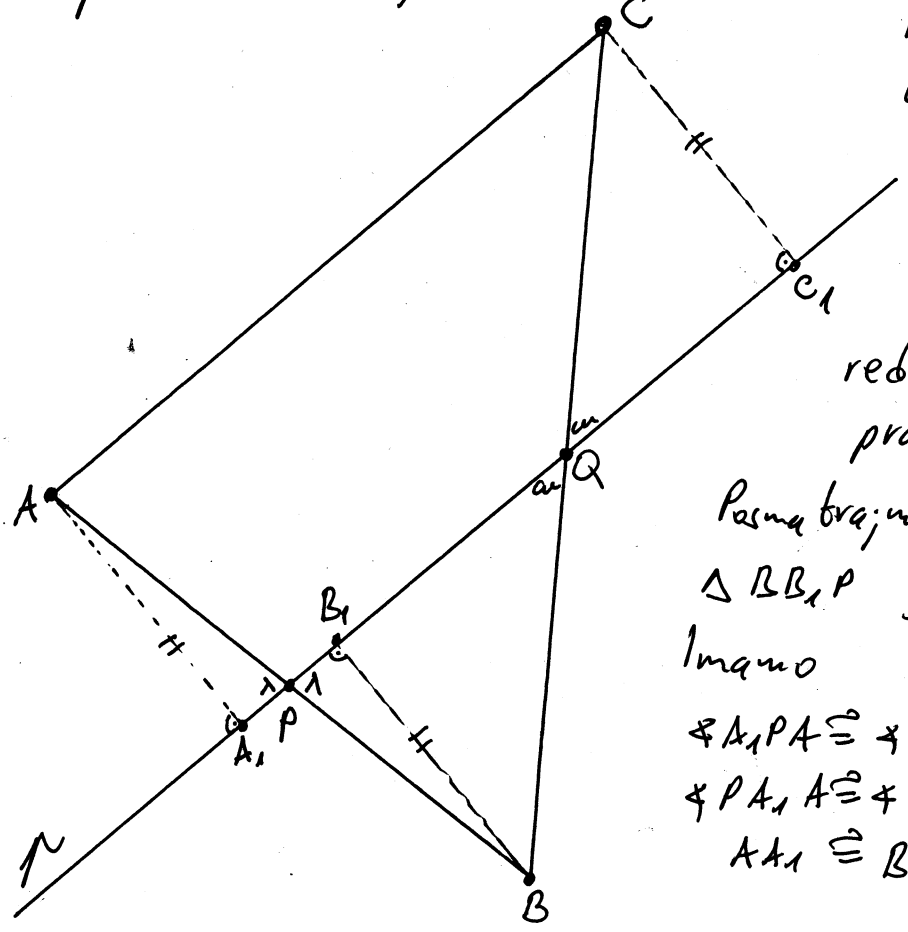
Primjetimo da su prave a i b paralelne i da je c transferzala pa imamo dva ugla λ na pravoj c. Prema tome, B je proizvoljna tačka pa pravu b možemo konstruisati, c je proizvoljna prava kroz tačku M pa i traženu pravu a možemo konstruisati.

# Dat je trougao $\Delta ABC$. Konstruisati pravu $p$ koja je jednako udaljena od vrhova $A$, $B$, $C$ datog trougla.

Rj.

<u>Analiza</u>

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je $p$ tražena prava koja je podjednako udaljena od vrhova $A$, $B$ i $C$ trougla $\Delta ABC$, i neka je poredak tački kao na slici. Označimo sa $A_1$, $B_1$ i $C_1$ ortogonalne projekcije redom tački $A$, $B$ i $C$ na pravu $p$.




Posmatrajmo trouglove $\Delta AA_1P$ i $\Delta BB_1P$ gdje je $\{P\} = p \cap AB$.

Imamo

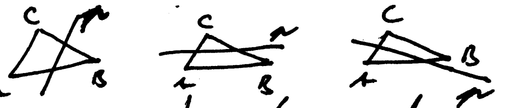
$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle A_1PA \cong \measuredangle B_1PB = \lambda \\ \measuredangle PA_1A \cong \measuredangle PB_1B = 90^\circ \\ AA_1 \cong BB_1 \end{array}\right\} \xrightarrow{UUS} \Delta AA_1P \cong \Delta BB_1P \Rightarrow AP \cong BP$$

Slično, posmatrajmo $\Delta B_1BQ$ i $\Delta C_1CQ$ (gdje je $\{Q\} = p \cap BC$.

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle B_1QB \cong \measuredangle C_1QC = \omega \\ \measuredangle BB_1Q \cong \measuredangle CC_1Q = 90^\circ \\ BB_1 \cong CC_1 \end{array}\right\} \xrightarrow{UUS} \Delta BB_1Q \cong \Delta CC_1Q \Rightarrow BQ \cong CQ.$$

Prema tome možemo primijetiti da prava $p$ prolazi kroz sredine stranica $AB$ i $BC$ pa je možemo konstruisati.

<u>Diskusija</u>

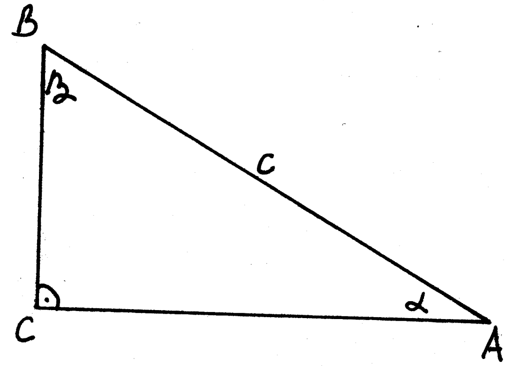



Zadatak ima tri rješenja, tj. možemo konstruisati tri različite prave koje su jednako udaljene od vrhova $A$, $B$ i $C$ datog trougla

(#) Konstruisati pravougli trougao kome je data hipotenuza i jedan oštar ugao.

R: Analiza

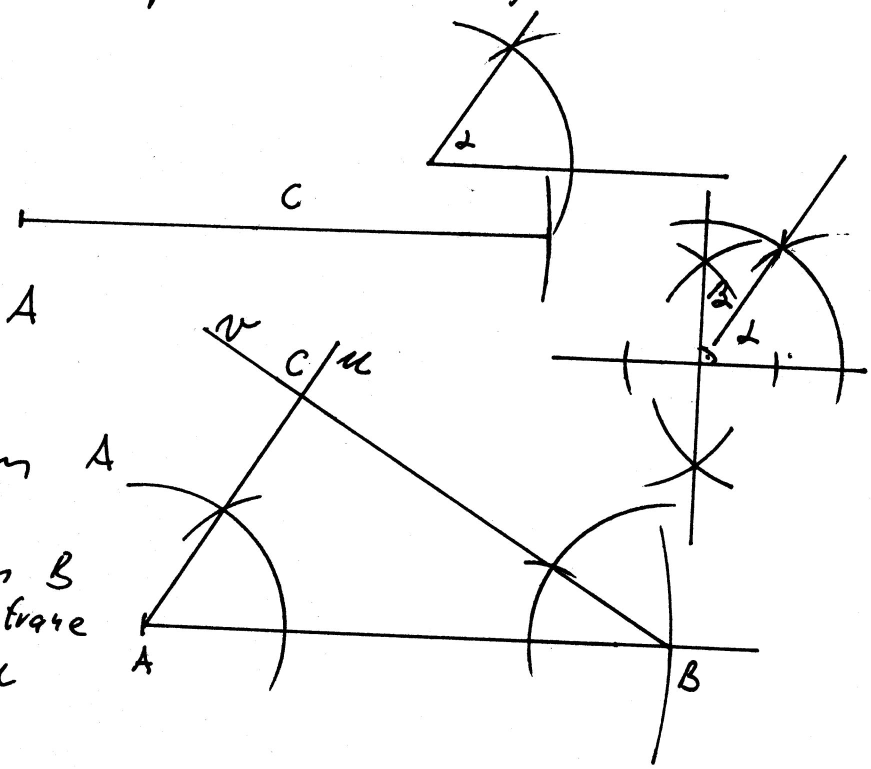
Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je $\Delta ABC$ pravougli trougao koji ima dat ugao $\alpha$ i dužinu hipotenuze $c$. U trouglu su poznata dva ugla ($90°$ i $\alpha$) pa možemo izračunati ugao $\beta$ po formuli $\beta = 90° - \alpha$. ($\alpha+\beta+90°=180°$)




Kako imamo hipotenuzu $c$ i dva nalegla ugla na njoj, pomoću pravila USU nije teško konstruisati traženi trougao

Konstrukcija

1. $\alpha$, $c$ ($\alpha < 90°$)
2. $\beta = 90° - \alpha$
3. pp $p$ sa početnom tačkom $A$
4. $k(A, c) \cap p = \{B\}$
5. pp $u$ sa početnom tačkom $A$ takvu da je $\measuredangle BAu = \alpha$
6. pp $v$ sa početnom tačkom $B$ koja se nalazi sa iste strane $p(A,B)$ sa koje je i pp $u$ takva da je $\measuredangle AB\vec{v} = \beta$
7. $u \cap v = \{C\}$
8. $\Delta ABC$




Dokaz

Da je konstruisani trougao pravougli koji ima dužinu hipotenuze $c$ jednaku dužini date duži slijedi iz Analize i Konstrukcije.

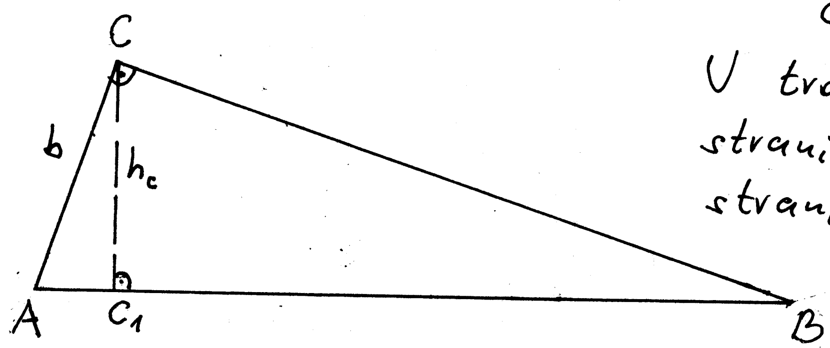
Diskusija

Zadatak uvijek ima jedinstveno rješenje

(#) Konstruisati pravougli trougao $\Delta ABC$ ako su poznati kateta $b$ i visina $h_c$ koja odgovara hipotenuzi $c$.

Rj: Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je data kateta $b$, visina $h_c$ i neka je $\Delta ABC$ traženi pravougli trougao.

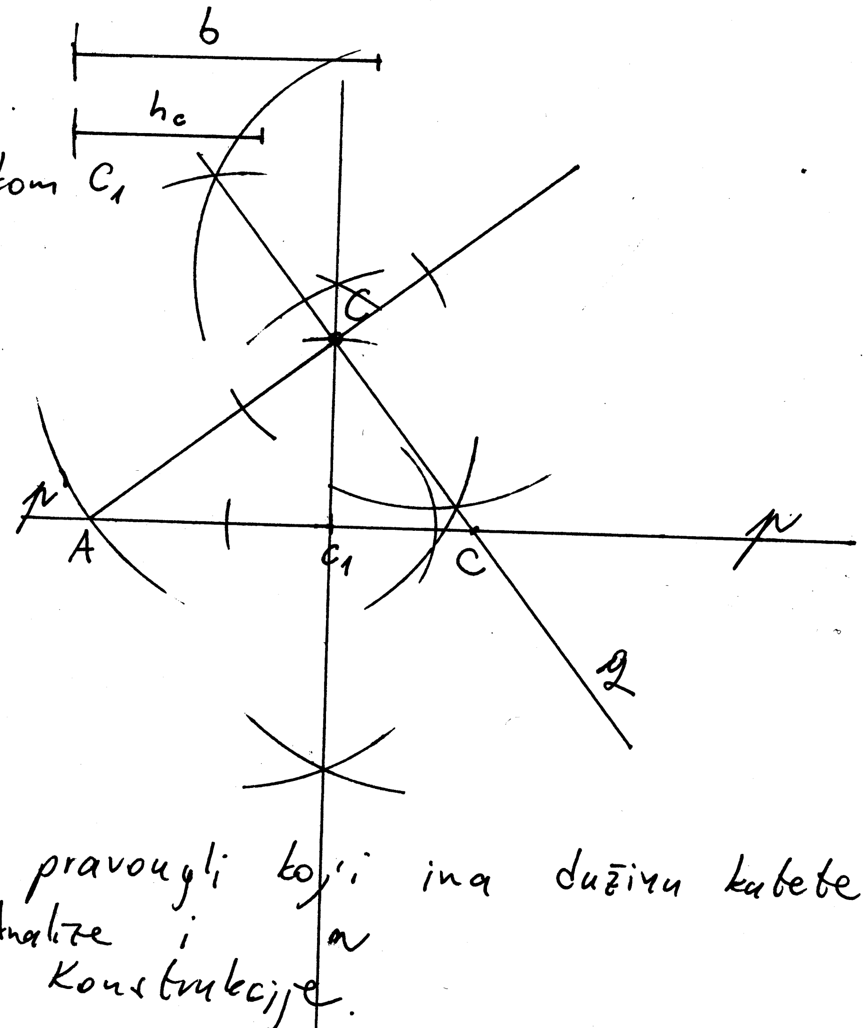



$CC_1 = h_c$

U trouglu $\Delta AC_1C$ imamo dvije stranice i ugao naspram veće stranice pa ga možemo konstruisati. Kako je poznato da je ugao $\measuredangle ACB = 90°$ to ćemo tačku $B$ dobiti na presjeku $p(A, C_1)$ i prave koja sadrži $C$ i okomita je na $p(A, C)$. Pa $\Delta ABC$ možemo konstruisati.

Konstrukcija

1. $b$, $h_c$
2. polupravu $p'$ sa početnom tačkom $C_1$
3. $n$, $n \ni C_1$ i $n \perp p'$
4. $k(C_1, h_c) \cap n = \{C\}$
5. $k(C, b) \cap p' = \{A\}$
6. pravu $p$, $p \supseteq p'$
7. pravu $q$, $q \ni C$ i $q \perp p(A, C)$
8. $p \cap q = \{C\}$
9. $\Delta ABC$




Dokaz

Da je konstruisani trougao pravougli koji ima dužinu katete $b$ i visinu $h_c$ slijedi iz Analize i Konstrukcije.

Diskusija

Za slučaj kad je $b \leq h_c$ zadatak nema rješenja

Za slučaj kad je $b > h_c$ zadatak ima jedinstveno rješenje.

(7) Konstruisati četverougao □ABCD ako su date dužine njegovih stranica AB = 8 cm, BC = 6 cm, CD = 5 cm i AD = 7 cm. Da li se u ovaj četverougao može upisati krug?

Rj. Kako ne znamo ni jedan ugao u četverouglu i znam samo stranice četverougla, četverougao ne možemo konstruisati.

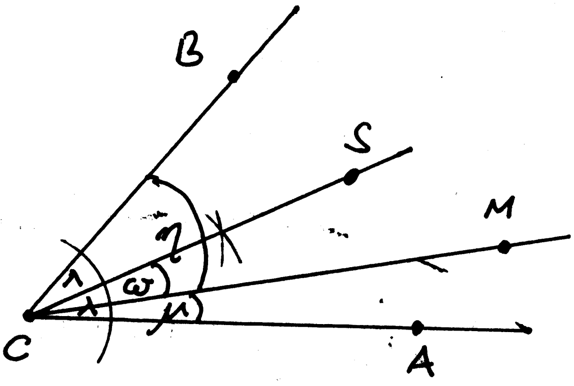
U četverougla se može upisati krug

$AB + CD = BC + AD$ (četverougao je tangentni)

(#) Zadani su ugao $\sphericalangle ACB$, poluprava $CM$ unutar ugla $\sphericalangle ACB$ i poluprava $CS$ koja polovi $\sphericalangle ACB$. Dokazati da je

$$\sphericalangle SCM = \frac{1}{2}(\sphericalangle MCA - \sphericalangle MCB).$$

Rj:




Uvedimo oznake:

$\lambda = \sphericalangle ACS \cong \sphericalangle SCB$

$\omega = \sphericalangle SCM$

$\mu = \sphericalangle MCA$ i $\eta = \sphericalangle MCB$.

Trebamo pokazati da je

$$\omega = \frac{1}{2}(\mu - \eta)$$

$\omega = \lambda - \mu$

$\omega = \eta - \lambda$

Tj.

$$\begin{aligned} \sphericalangle SCM &= \sphericalangle ACS - \sphericalangle MCA \\ \sphericalangle SCM &= \sphericalangle MCB - \sphericalangle SCB \end{aligned} \quad + \; (\sphericalangle ACS \cong \sphericalangle SCB)$$

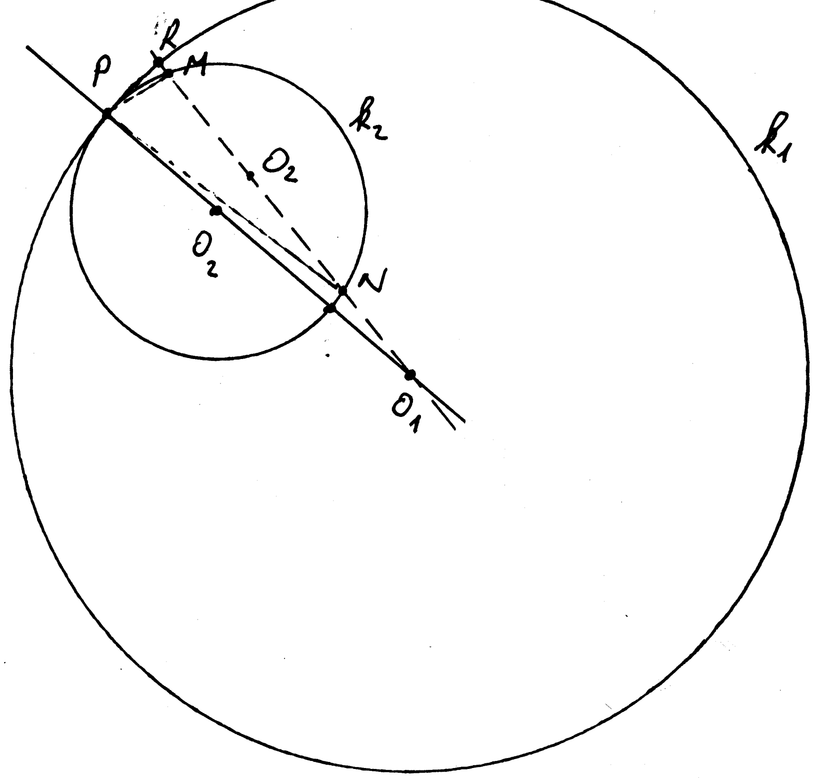
$$2\sphericalangle SCM = \sphericalangle MCB - \sphericalangle MCA$$

$$\sphericalangle SCM = \frac{1}{2}(\sphericalangle MCB - \sphericalangle MCA)$$

q.e.d.

(#) Dat je krug $k_1(O_1, r_1)$ i u njegovoj unutrašnjosti krug $k_2(O_2, r_2)$ takav da dodiruje krug $k_1$ u tački $P$. Dokazati da su tačke $O_1, O_2$ i $P$ kolinearne.

Rj.




Posmatrajmo pravu $p(O_1, P)$. Ako tačka $O_2$ ne bi pripadala ovoj pravoj imali bi da $p(O_1, O_2) \cap k_2 = \{M, N\}$ gdje je $MN$ prečnik kruga $k_2$. Recimo da je poredak $O_1-N-O_2-M$. Neka je $R$ tačka na $k_1$ t.d. $N-M-R$.

Ugao nad prečnikom je prav tj. $\measuredangle MPN = 90°$. Kako je $\measuredangle MPO_1 > \measuredangle MPN \Rightarrow \measuredangle MPO_1$ je tup, pa u $\Delta MPO_1$ stranica $MO_1$ je najveća tj. $MO_1 > PO_1$

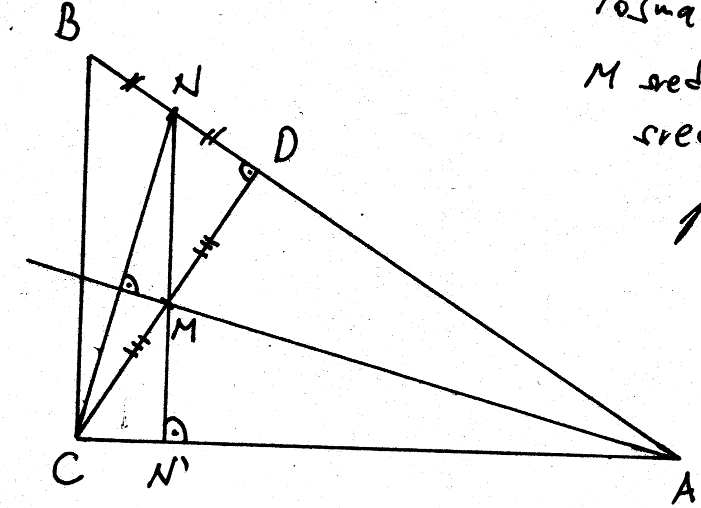
# kontradikcija
(${PO_1}$ i $RO_1$ su poluprečnici kruga $k_1$ i kako je $O_1-M-R$ to je $MO_1 < PO_1$)

Pretpostavka suprotna tvrdnji nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome tačke $O_1, O_2$ i $P$ su kolinearne

q.e.d.

(#) Tačka $D$ je podnožje visine koja odgovara hipotenuzi $AB$ pravouglog trougla $\triangle ABC$, a $M$ i $N$ su redom sredine duži $CD$ i $BD$. Dokazati da $p(A,M) \perp p(C,N)$.

Rj.




Posmatrajmo $\triangle CDB$.

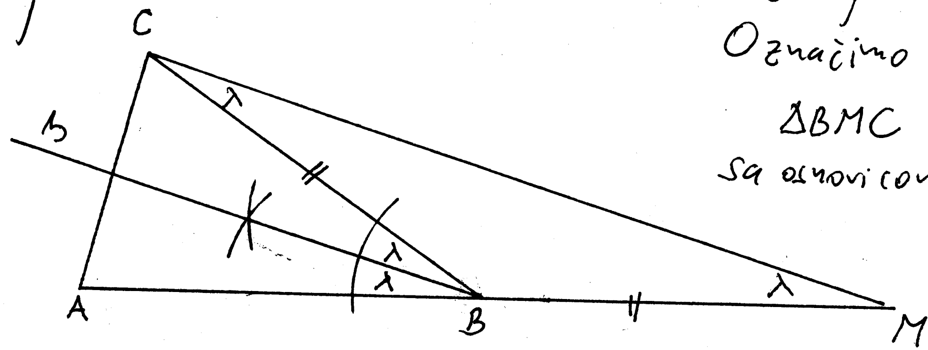
$M$ sredina $CD$, $N$ sredina $BD$ $\Rightarrow$ $MN$ je srednja linija $\triangle CDB$ $\Rightarrow$ $MN \parallel CB$ tj.
$p(M,N) \parallel p(C,B) \Rightarrow p(M,N) \perp AC$

Posmatrajmo $\triangle ACN$ (Neka je $\{N'\} = p(M,N) \cap AC$)
$CD$ visina na $AN$, $NN'$ visina na $AC$
$\Rightarrow$ $M$ ortocentar trougla $\triangle ACN$.
Kako se visine sijeku u istoj tački
$\Rightarrow$ $p(A,M) \perp p(C,N)$

q.e.d.

(#) Na pravoj $p(A,B)$ trougla $\Delta ABC$ data je tačka $M$ takva da je $A-B-M$ i $BM \cong BC$. Dokazati da je prava $p(M,C)$ paralelna simetrali ugla.

Rj:




Neka je $s$ simetrala ugla $\measuredangle ABC$.

Označimo sa $\lambda = \measuredangle ABs \cong \measuredangle CBs$

$\left.\begin{array}{l}\Delta BMC \text{ jkk} \\ \text{sa osnovicom } MC\end{array}\right\} \Rightarrow \measuredangle BMC = \measuredangle MCB$

Kako je $\measuredangle ABC = 2\lambda$ i

$\measuredangle ABC = \measuredangle BMC + \measuredangle MCB$

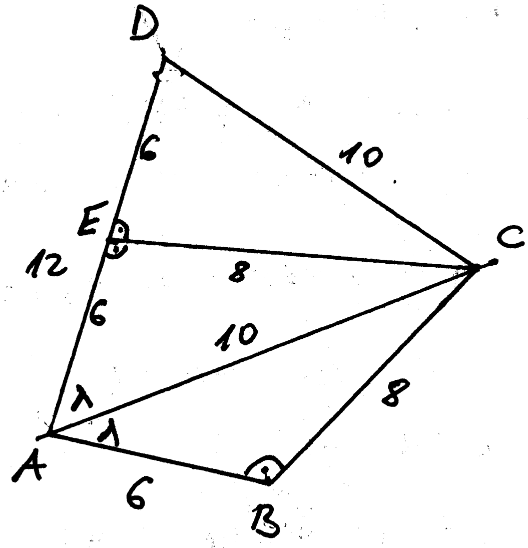
$\Rightarrow \measuredangle BCM \cong \measuredangle BMC = \lambda$

Sad na pravoj $p(A,B)$ imamo $\measuredangle ABs = \measuredangle AMS = \lambda \Rightarrow s \parallel p(M,C)$

q.e.d.

#) U četverouglu $\square ABCD$ je $AB < BC < CD < AD$ i svake dvije susjedne stranice se razlikuju za 2 cm (izuzev $AB$ i $AD$). Nađi površinu četverougla, ako mu je obim 36 cm i ako dijagonala $AC$ pripada simetrali ugla $\measuredangle BAD$.

Rj.




$AB < BC$, $BC - AB = 2 \Rightarrow BC = AB + 2$

$BC < CD$, $CD - BC = 2 \Rightarrow CD = AB + 4$

$CD < AD$, $AD - CD = 2 \Rightarrow AD = AB + 6$

$O = 36\text{ cm} \Rightarrow$

$AB + BC + CD + AD = 36$ tj. $4AB + 12 = 36$

$AB = 6$

$\Rightarrow BC = 8$, $CD = 10$ i $AD = 12$

Dijagonala $AC$ leži na dijagonali. Uzmimo tačku $E \in AD$ takvu da je $AE = 6$. Iz podudarnosti SUS $\Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta AEC$

$\Downarrow$

$AB \cong AE = 6$ cm

$\Delta ECD$ je pravougli

$10^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow \measuredangle AEC \cong \measuredangle DEC = 90^\circ \Rightarrow AC^2 = 8^2 + 6^2 = 100$

$AC = 10$

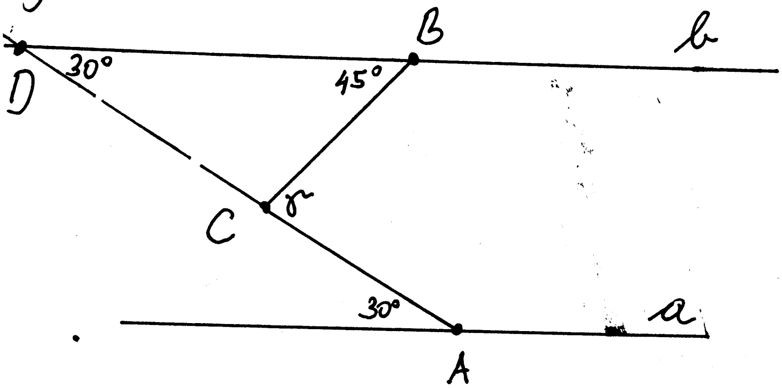
$$P_{\Delta ACD} = \frac{AD \cdot h_{AD}}{2} = \frac{12 \cdot 8}{2} = 48$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24$$

$$P_{\square ABCD} = 72\text{ cm}^2$$

(#) Date su dvije paralelne prave $a$ i $b$, tačke $A \in a$, $B \in b$ i $C$ koja se nalazi "između" pravih $a$ i $b$. Ako je $\sphericalangle CAa = 30^\circ$ i $\sphericalangle CBb = 45^\circ$ izračunati ugao $\sphericalangle ACB$.

Rj.:




$\gamma = ?$

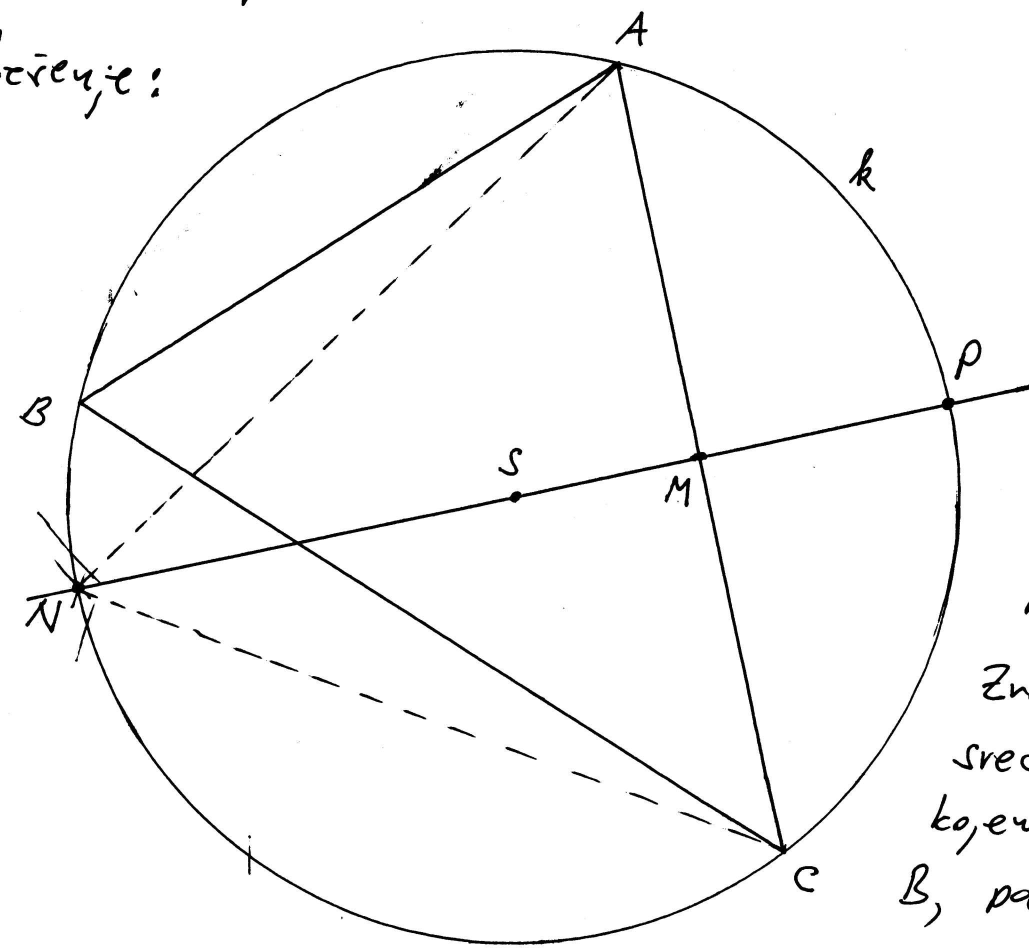
Neka je $p(A,C) \cap b = \{D\}$ (vidi sliku lijevo).

$$a \parallel b \xRightarrow{\sphericalangle CAa = 30^\circ} \sphericalangle CDB = 30^\circ$$

$\gamma$ je vanjski ugao $\Delta BDC \Rightarrow \gamma = 75^\circ$.

(#) Neka je $k$ kružnica koja je opisana oko trougla $\Delta ABC$, $AB<AC$ i neka je tačka $N$ središte luka $\widehat{AC}$ (kojem pripada i tačka $B$) kružnice $k$. Dalje, neka je $M$ središte duži $AC$ i $P \neq N$ tačka presjeka prave $p(N,M)$ i opisane kružnice. Dokazati da je $NP$ prečnik opisane kružnice.

Rješenje:




Na osnovu postavke zadatka tačka $M$ pripada duži $NP$. Da bi pokazali da je duž $NP$ prečnik opisane kružnice trebamo pokazati da tačka $S$ pripada duži $NP$. Znamo da je $N$ sredina luka $\widehat{AC}$ kojem pripada tačka $B$, pa je $N$ podjednako udaljena od tački $A$ i $C$ tj. $AN \cong NC$. Sad imamo

$$\left.\begin{array}{l} AN \cong NC \\ NM \cong NM \\ AM \cong MC \ (M \text{ sredina } AC) \end{array}\right\} \overset{SSS}{\Longrightarrow} \Delta ANM \cong \Delta CNM$$

$$\Downarrow$$

$$\sphericalangle AMN \cong \sphericalangle CMN = 90^\circ \Rightarrow NP \text{ simetrala duži } AC$$

Kako je centar opisane kružnice presjek simetrala stranica to $S$ leži na simetrali stranice $AC$ tj. na $NP$.

$\Rightarrow$ $NP$ je prečnik opisane kružnice.